MATERIAL

DE

MATEMÁTICA I

CAPÍTULO I

REVISÃO

Curso:
Administração

ESIC
BUSINESS&MARKETINGSCHOOL

1. Revisão
1.1 – Potência de Expoente Inteiro

Seja *a* um número real e *m* e *n* números inteiros positivos. Podemos observar as seguintes propriedades de potenciação:

1) $a^n = a \times a \times a \times ... \times a$ (n vezes)

2) $a^0 = 1$

3) $a^1 = a$

4) $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, $a \neq 0$

5) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

(Produto de potência de mesma base: repete a base e soma os expoentes)

6) $a^n \div a^m = a^{n-m}$, $a \neq 0$

(divisão de potência de mesma base: repete a base e subtrai os expoentes)

7) $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$

(potência de potência: repete a base e multiplica os expoentes)

8) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

OBS.: I) $(-a)^{ímpar} = negativo$ $\qquad$ $(-a)^{par} = positivo$

II) Observe a diferença:

$\left(2^3\right)^2 = 2^{3.2} = 2^6$ $\qquad$ $2^{3^2} = 2^9$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Calcule o valor das expressões abaixo:

a) 2^4

b) $(-3)^3$

c) $-(-2)^5$

d) 3^{-2}

e) $\left(\frac{4}{3}\right)^2$

f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$

g) $\frac{2^{13} \div 1024}{4 \cdot 8}$

h) $\frac{\left(10^2\right)^3 \div 10}{10^{2^3} \div 10^6}$

RESPOSTAS

a) 16
b) –27
c) 32
d) 1/9
e) 16/9
f) 125/27
g) 1/4
h) 10^3 *ou* 1000

1.2 – Cálculo de Expressões Numéricas

Para calcular corretamente qualquer expressão numérica, é necessário obedecer algumas prioridades. Então, devemos ter em mente que devemos fazer os cálculos na seguinte ordem:
1) parênteses ( ), colchetes [ ] e chaves { }
2) Potência e raiz
3) Multiplicação e divisão
4) Soma e subtração

OBS.: i) Soma e subtração de fração: deve-se tirar o MMC entre os denominadores.

ii) Produto de fração: deve-se multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador. P. ex., $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}$

iii) Divisão de fração: repete o primeiro e multiplica pelo inverso do segundo. Por ex.,
$\frac{2}{3}\div\frac{7}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{10}{21}$

iv) Multiplicação e divisão de números reais:

Multiplicação	$+\times+=+$	$+\times-=-$	$-\times+=-$	$-\times-=+$
Divisão	$+\div+=+$	$+\div-=-$	$-\div+=-$	$-\div-=+$

v) Soma e subtração de números reais: Prevalece o sinal do maior.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Calcule o valor numérico das expressões abaixo:

a) $[-18+(-6+10-6)-2]+[12-7+(-8+8)]$ *(–17)*

b) $17-\{14-21+[-12-(7-10-1)-4]\}+10$ *(46)*

c) $-3+5\{-3+5[-3+5(-3+5)]\}$ *(157)*

d) $3\{-1.\ 2\ [5-3(-1)]+10\}+[5\cdot5-6(1-4)]$ *(25)*

e) $[(-8)(-27)-12(-7)+3\cdot16]\div(1-7)$ *(–58)*

f) $148-[5^3-2^2(-2)^3+3(2^5-4^3)]$ *(87)*

g) $[(-2)^7-(-2)^6+(-2)^5-(-2)^4]\div[(-2)^3-(-2)^2+(-2)^1-(-2)^0]$ *(16)*

h) $\frac{2}{5}+\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{4}{15}\right)$ *(4/3)*

i) $\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{5}-\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{6}{5}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$ *(–3/4)*

j) $\frac{11}{2}\left[\left(-\frac{7}{6}\right)\div\left(-\frac{14}{3}\right)-\frac{11}{4}\right]$ *(–55/4)*

k) $\left[2-\left(-\frac{5}{2}\right)\div\left(\frac{11}{4}\right)\right]\left(-\frac{11}{4}\right)$ *(–8)*

l) $3\div\left(-\frac{1}{5}\right)-5\left(-\frac{1}{2}\right)$ *(–25/2)*

m) $\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{-2}$ *(16/25)*

n) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)\right]^{2}\div\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$ *(3/2)*

1.3 – Potência de Expoente Racional, Simplificação de Radicais e Racionalização

Às vezes nos deparamos com potências da forma $a^{n/m}$ e nos perguntamos: ”Como resolver esta expressão?” Devemos nos lembrar que a expressão acima simboliza $\sqrt[m]{a^n}$. Portanto:

$8^{1/3}=\sqrt[3]{8}=2$

OBS.: Como trabalharemos apenas com números reais, só consideraremos raiz de número negativo se o seu índice for **ímpar**, pois caso contrário, seu resultado não será um número real.

Outro fato comum é nos depararmos com um resultado que apresenta uma raiz que pode ser simplificada. Como proceder para simplificá-la?

1) Fatore o radicando
2) Agrupe os fatores primos achados de acordo com o índice da raiz, p. ex., se o índice for 2, agrupe-os de dois em dois; se o índice for 3, agrupe-os de três em três; e assim por diante.
3) Cada grupo formado sai da raiz como um fator apenas e os fatores que não formarem grupos completos permanecem dentro da raiz.
4) Todos os fatores que saírem serão multiplicados assim como os que permanecerem.

Ex.: Simplifique $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Podemos ainda chegar a um resultado que apresenta um radical no denominador, fato este esteticamente incorreto na matemática. Portanto, devemos racionalizar o resultado. Isso significa que devemos fazer manipulações algébricas para retirar o radical do denominador.

O tipo de racionalização mais simples, que é a que veremos aqui, é aquela que apresenta somente uma raiz quadrada no denominador, e conseguimos racionalizar o resultado, multiplicando ambos, numerador e denominador, pela própria raiz.Por ex.:

$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{2}{3\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 - Simplifique os radicais abaixo:

a) $\sqrt{576}$
b) $\sqrt{300}$
c) $\sqrt{125}$
d) $\sqrt{52}$
e) $\sqrt{243}$
f) $\sqrt{90}$
g) $\sqrt{98}$
h) $\sqrt{324}$

2 - Racionalize:

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$
b) $\frac{4}{\sqrt{12}}$
c) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$
d) $\frac{6}{\sqrt{3}}$
e) $\frac{3}{\sqrt{4}}$

RESPOSTAS

2 - a) 24
b) $10\sqrt{3}$
c) $5\sqrt{5}$
d) $2\sqrt{13}$
e) $9\sqrt{3}$
f) $3\sqrt{10}$
g) $7\sqrt{2}$
h) 18

3 - a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
d) $2\sqrt{3}$
e) $\frac{3}{2}$

1.4 – Operações com Expressões Algébricas

Expressões algébricas são expressões que envolvem letras ou números e letras, como por exemplo:

$a+b$ $3x+8$ $2x^2-5x+6$

$2x+2y$ $3a^2bc$ $\frac{3x}{8}-bc$

As letras são chamadas de **variáveis** e os números que as acompanham são chamados de **coeficientes**. Podemos fazer as seguintes operações com expressões algébricas:

1.4.1 – Adição e subtração

Só podemos adicionar ou subtrair termos semelhantes e, essa operação será feita sobre os coeficientes, mantendo-se a parte literal. Observe que, se não houver termo semelhante para operar, ele apenas será repetido.

Ex.: $(3a + 5b - 7c) + (6a - 8b + c) = 3a + 6a + 5b - 8b - 7c + c = 9a - 3b - 6c$

$(5xy + 2x - 3y) - (8x^2 + 3xy - x) = 5xy - 3xy + 2x + x - 3y - 8x^2 = 2xy + 3x - 3y - 8x^2$

1.4.2 – Multiplicação

A multiplicação deverá ser feita multiplicando-se primeiro os coeficientes, depois a parte literal, obedecendo as regras de potenciação e a regra da distributividade e, por fim, adicionando-se os termos semelhantes.

Ex.: $(x+5)(x-2) = x \cdot x - x \cdot 2 + 5 \cdot x - 5 \cdot 2 = x^2 + 3x - 10$

1.4.3 – Divisão de Polinômio por Monômio

Este tipo de divisão deverá ser realizado, dividindo-se cada termo do polinômio pelo monômio, lembrando-se das regras de potenciação.

Ex.: $(6a^3 - 4a^2 + 8) \div 2a = \dfrac{6a^3}{2a} - \dfrac{4a^2}{2a} + \dfrac{8}{2a} = 3a^2 - 2a + \dfrac{4}{a}$

1.4.4 – Produtos Notáveis

Produtos notáveis, como o próprio nome já diz, são produtos que aparecem com bastante freqüência na resolução de problemas, Aqui, veremos os mais usados:

$$\boxed{\begin{array}{c} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \end{array}}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 – Efetue as operações abaixo:

a) $(3ab - 2a + 4b) + (-3b + a - 6ab)$

b) $(2xy - 5x + y^2) - (3 - 2xy + x^3 + 3y^2)$

c) $(2xy - 2x^2 + 5y) - 3(xy - 2x^2 + y)$

d) $(-x^2 + xy + 4) - (2x^2 - 2xy + 5)$

e) $(3x^2 + 2x - xy) + (3y - xy + x^2) - (2x^2 - 2xy)$

f) $(2a)(10a^3 - 18a^2 + 8a)$

g) $(-6y)(y^3 + 5y - 1)$

h) $(x + y^3 - 3)(2 - x)$

i) $(x-2)(x+y)$

j) $(x^2 - 3y)(x + 3y)$

k) $(6x^3 - 4x^2 + 8) \div (2x)$

l) $(3x^3 + 6x^2 - 12) \div (-3x)$

m) $(5x^2y^3 + 4x^4y - 3xy^2) \div (2xy)$

n) $(12x^3y^5 - 16x^4y^3 + 20x^5y^2) \div (4x^2y)$

2) Desenvolva os produtos indicados:

a) $(x+2)^2$

b) $(5+3x)^2$

c) $(2x+5y)^2$

d) $\left(\sqrt{2}+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$

e) $(x-5)^2$

f) $(4-2x)^2$

g) $(2x-3y)^2$

h) $\left(\frac{3-2x}{5}\right)^2$

i) $(x+5)(x-5)$

j) $(2x-1)(2x+1)$

k) $(2x-3y)(2x+3y)$

l) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

m) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$

RESPOSTAS

1 – a) $-3ab-a+b$

b) $4xy-5x-2y^2-3-x^3$

c) $-xy+2y+4x^2$

d) $3xy-3x^2-1$

e) $2x^2+2x+3y$

f) $20a^4-36a^3+16a^2$

g) $-6y^4-30y^2+6y$

h) $5x+2y^3-x^2-xy^3-6$

i) $x^2+xy-2x-2y$

j) $x^3+3x^2y-3xy-9y^2$

k) $3x^2-2x+\frac{4}{x}$

l) $-x^2-2x+\frac{4}{x}$

m) $\frac{5}{2}xy^2+2x^3-\frac{3}{2}y$

n) $3xy^4-4x^2y^2+5x^3y$

2 – a) x^2+4x+4

b) $25+30x+9x^2$

c) $4x^2+20xy+25y^2$

d) $2+2x+\frac{x^2}{2}$

e) $x^2-10x+25$

f) $16-16x+4x^2$

g) $4x^2-12xy+9y^2$

h) $\frac{9-12x+4x^2}{25}$

i) x^2-25

j) $4x^2-1$

k) $4x^2-9y^2$

l) $x-y$

m) $x-1$

1.5 – Equações do 1° Grau

Uma equação que pode ser escrita na forma *ax + b = 0*, onde ***a*** e ***b*** são números reais conhecidos, com ***a ≠ 0***, ***x*** representa uma incógnita e o expoente de ***x*** é **1**, é chamada de **equação do 1° grau a uma incógnita**. Os números conhecidos são chamados **coeficientes.** Um valor que pode ser atribuído à incógnita, tal que torne a sentença verdadeira é chamado de **raiz** ou **solução** da equação. O conjunto das raízes ou soluções de uma equação é chamado de **conjunto solução** e pode ser indicado pela letra **S.**

Forma Geral: $ax + b = 0$ $\quad a \neq 0$

Solução: $ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

Ex.: 1) $2-2x=8 \Rightarrow -2x=8-2 \Rightarrow -2x=6 \;.\,(-1) \Rightarrow x=-6/2 \Rightarrow x=-3$

2) $\frac{x}{3}+3=7 \Rightarrow \frac{x}{3}=7-3 \Rightarrow \frac{x}{3}=4 \Rightarrow x=4\times 3 \Rightarrow x=12$

3) $\frac{4x-2}{9}-\frac{x+7}{3}=-3 \Rightarrow \frac{1(4x-2)-3(x+7)}{9}=\frac{9\times(-3)}{9} \Rightarrow 4x-2-3x-21=-27 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=-27+23 \Rightarrow x=-4$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 - Resolva as equações abaixo:

a) $-3x-5=25$

b) $2x-\frac{1}{2}=3$

c) $3x+24=-5x$

d) $\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}=0$

e) $\frac{x}{2}+10=16$

f) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=10$

g) $4(x-2)+10=3(2+x)-7$

h) $\frac{x+1}{5}-\frac{x-1}{2}=\frac{3-x}{3}$

i) $3x-\frac{4x-1}{5}=6-\frac{2-5x}{6}$

j) $2x+(x-3)+2=3x+5$

k) $x-\frac{5-x}{2}+1=\frac{3(x+1)}{2}-3$

l) $\frac{12-2x}{6}-\frac{18-4x}{3}=x+2$

RESPOSTAS

1 - a) x = – 10
b) x = 7/4
c) x = – 3
d) x = 8/15
e) x = 12
f) x = 12
g) x = – 3
h) x = 9
i) x = 4
j) sem solução
k) solução real
l) sem solução

1.6 – Inequações do 1° Grau

Uma expressão algébrica que apresenta algum sinal de desigualdade (>, <, ≥, ≤) é denominada inequação. Resolver uma inequação é encontrar todos os valores que tornam a desigualdade verdadeira. A inequação do 1° grau é aquela em que o expoente da incógnita é 1.

A maneira de resolver é semelhante à equação do 1° grau. A diferença consiste no fato de que, quando o coeficiente do x é negativo, multiplicamos a inequação por (–1) e invertemos a desigualdade.

Ex.: 1) $3x - 15 \leq 0 \Rightarrow 3x \leq 15 \Rightarrow x \leq 15/3 \Rightarrow x \leq 5$

$S = \{x \in \Re \,/\, x \leq 5\}$

2) $-2x+8\geq 0 \Rightarrow -2x \geq -8 \Rightarrow -2x \leq 8 \Rightarrow x \leq \frac{8}{2} \Rightarrow x \leq 4$

$S = \{x \in \Re \,/\, x \leq 4\}$

3) $-4(2x+3)-2(x+1)\leq 2 \Rightarrow -8x-12-2x-2\leq 2 \Rightarrow -10x-14\leq 2 \Rightarrow -10x\leq 16\ .(-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow 10x\geq -16 \Rightarrow x\geq -\frac{16}{10} \Rightarrow x\geq -\frac{8}{5}$

$S=\left\{x\in \Re\,/\,x\geq \frac{8}{5}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 - Resolva as inequações abaixo:

a) $2x - 1 \geq 9$

b) $2x - 6 > x + 5$

c) $5 - 3x < x + 1$

d) $-3(2x - 2) + (x - 1) < 4$

e) $4(x - 1) - 3(x + 1) > -10$

f) $10x - 6(x - 1) \geq 5(x + 1) + 7$

g) $x + 10x - 6 \leq 13(x - 2)$

h) $x-\frac{x-3}{2}>\frac{5x+7}{10}-\frac{5}{4}$

i) $\frac{x-1}{5}+2>x$

j) $\frac{5x+2}{3}-\frac{x-3}{2}\geq 1$

k) $2(4x - 3) + 3(3 - 2x) < 2x + 1$

RESPOSTAS

1 – a) $S = \{x\in\Re \mid x \geq 5\}$

b) $S = \{x\in\Re \mid x > 11\}$

c) $S = \{x\in\Re \mid x > 1\}$

d) $S = \{x\in\Re \mid x > 1/5\}$

e) $S = \{x\in\Re \mid x > -3\}$

f) $S = \{x\in\Re \mid x \leq -6\}$

g) $S = \{x\in\Re \mid x \geq 10\}$

h) $S = \{x\in\Re\}$

i) $S = \{x\in\Re \mid x < 9/4\}$

j) $S = \{x\in\Re \mid x > -1\}$

k) $S = \phi$

1.7 – Equações do 2º Grau

Uma equação pode ser escrita na forma $ax^2+bx+c=0$, onde *a, b* e *c* são números reais conhecidos, com $a \neq 0$ e x representa uma incógnita, é chamada de equação do 2º grau a uma incógnita. Os números conhecidos são chamados **coeficientes**. Os valores que podem ser atribuídos à incógnita, tal que torne a sentença verdadeira são as **raízes** ou **soluções** da equação. O conjunto das raízes ou soluções de uma equação é chamado **conjunto solução** e pode ser indicado pela letra ***S***. Uma equação do 2º grau pode ser resolvida segundo a fórmula de Bhaskara, que será apresentada a seguir:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{onde } \Delta=b^2-4ac$$

Neste caso, Δ é chamado de **discriminante**, pois discrimina quantas soluções terá a equação:

- Se $\Delta>0$, a equação terá duas raízes;
- Se $\Delta=0$, a equação terá uma raiz;
- Se $\Delta<0$, a equação não terá raiz;

Ex.: $3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{5+1}{6} \Rightarrow x' = 1 \\ x'' = \frac{5-1}{6} \Rightarrow x'' = \frac{2}{3} \end{cases}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 – Resolva as equações abaixo:

a) $x^2 = 9$
b) $3x^2 - 12 = 0$
c) $3x^2 + 21x = 0$
d) $24x - 6x^2 = 0$
e) $\frac{x^2 + 2}{9} = 3$
f) $x^2 + 5x + 6 = 0$
g) $x^2 - 4x + 4 = 0$
h) $\frac{x^2}{4} - 4x = -16$
i) $2x^2 - 6x = 4x - 12$
j) $x^2 + x = -1$
k) $x^2 - \frac{9}{2}x + 5 = 3(2x - 5)$
l) $x^2 - 6x + 10 = 0$
m) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
n) $(x-2)(x+3) = 5x - 10$
o) $(x+3)^2 = 16$

RESPOSTAS

1 – a) $x = \pm 3$
b) $x = \pm 2$
c) $x = 0$ ou $x = -7$
d) $x = 4$ ou $x = 0$
e) $x = \pm 5$
f) $x = -2$ ou $x = -3$
g) $x = 2$
h) $x = 8$
i) $x = 2$ ou $x = 3$
j) sem solução
k) $x = 8$ ou $x = 5/2$
l) sem solução
m) $x = 1$ ou $x = 1/2$
n) $x = 2$
o) $x = 1$ ou $x = -7$

1.8 – Sistemas de Equações do 1° Grau

Um sistema de equações do 1° Grau é um conjunto de equações do 1° grau que devem ser resolvidas juntas pois uma depende da outra. Neste ponto, veremos apenas sistemas de duas equações e duas incógnitas. Para resolvermos estes sistemas, veremos os dois métodos mais comuns: **Método da Substituição** e **Método da Adição.**

1.8.1 – Método da Substituição

Este método consiste em isolar e substituir uma das incógnitas. Achar o seu valor e depois substituir o resultado para calcular a segunda.

Ex.: Resolva os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 10 \end{cases}$

i) Isolar uma das incógnitas, por ex., x na equação (II):

$x - y = 10 \Rightarrow x = 10 + y \ (III)$

ii) Substituir, na equação (I), x pela expressão (III):

$(10 + y) + y = 6 \Rightarrow 10 + 2y = 6 \Rightarrow 2y = -4 \Rightarrow y = -2$

iii) Substituir o valor de y (– 2) em qualquer uma das equações, p. ex., na (III):

$x = 10 + y \Rightarrow x = 10 + (-2) \Rightarrow x = 8$

Logo, a solução será $x = 8$ *e* $y = -2$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

i) Isolar uma das incógnitas, por ex., x na equação (I):

$2x + 5y = 12 \Rightarrow 2x = 12 - 5y \Rightarrow x = \dfrac{12-5y}{2} \ (III)$

ii) Substituir, na equação (II), x pela expressão (III):

$3\,\dfrac{12-5y}{2} + 2y = 7 \Rightarrow \dfrac{36-15y}{2} + 2y = 7 \Rightarrow \dfrac{36-15y+4y}{2} = \dfrac{14}{2} \Rightarrow 36 - 11y = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow -11y = 14 - 36 \Rightarrow -11y = -22 \quad .(-1) \Rightarrow 11y = 22 \Rightarrow y = 2$

iii) Substituir o valor de y (2) em qualquer uma das equações, p. ex., na (III):

$x = \dfrac{12-5.2}{2} \Rightarrow x = 1$

Logo, a solução será $x = 1$ *e* $y = 2$

1.8.2 – Método da Adição

Este método consiste em adicionar as duas equações membro a membro, com o objetivo de obter uma equação que tenha apenas **uma** incógnita. Para isso, escolheremos uma incógnita cujos coeficientes devem ser simétricos.

Ex.: Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 10 \end{cases}$

i) Neste caso, não é necessário arrumar nenhuma equação, simplesmente fazemos a soma:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 10 \end{cases} +$$

$2x = 16 \quad \Rightarrow x = 8$

ii) Substituir o valor de x(8) em qualquer uma das equações, p. ex., na (I):
$x + y = 6 \Rightarrow 8 + y = 6 \Rightarrow y = -2$

Logo, a solução será $x = 8$ *e* $y = -2$

b) $\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 5y = 154 \end{cases}$

i) Devemos obter coeficientes simétricos de **x** ou **y** para adicionarmos as equações, então, podemos multiplicar (II) por (– 2):

$$\begin{cases} 2x - 2y = 100 \\ 2x + 5y = 154 \end{cases} +$$

$3y = 54 \quad \Rightarrow y = 18$

ii) Substituir o valor de y(18) em qualquer uma das equações, p. ex., na (I):
$x + y = 50 \Rightarrow x + 18 = 50 \Rightarrow x = 32$

Logo, a solução será $x = 32$ *e* $y = 18$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

i) Devemos obter coeficientes simétricos de **x** ou **y** para adicionarmos as equações, então, podemos multiplicar (II) por (– 2) e (I) por (3):

$$\begin{cases} 6x + 15y = 36 \\ -6x - 4y = -14 \end{cases} +$$

$11y = 22 \quad \Rightarrow y = 2$

ii) Substituir o valor de y(2) em qualquer uma das equações, p. ex., na (I):
$2x + 5.2 = 12 \Rightarrow 2x + 10 = 12 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

Logo, a solução será $x = 1$ e $y = 2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 - Resolva os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} 2x + y = 57 \\ x - y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 5x + 4y = 11 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + 3y = 21 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x - 7y = 30 \end{cases}$

RESPOSTAS

1 – a) $x = 20$ e $y = 17$
c) $x = 4$ e $y = 2$
d) $x = 2$ e $y = 1$
e) $x = 3$ e $y = -1$
f) $x = 1$ e $y = 2$
h) $x = 3$ e $y = 5$
i) $x = 2$ e $y = 0$
j) $x = 4$ e $y = -2$

MATERIAL

DE

MATEMÁTICA I

CAPÍTULO II

FUNÇÕES

Curso:

Administração

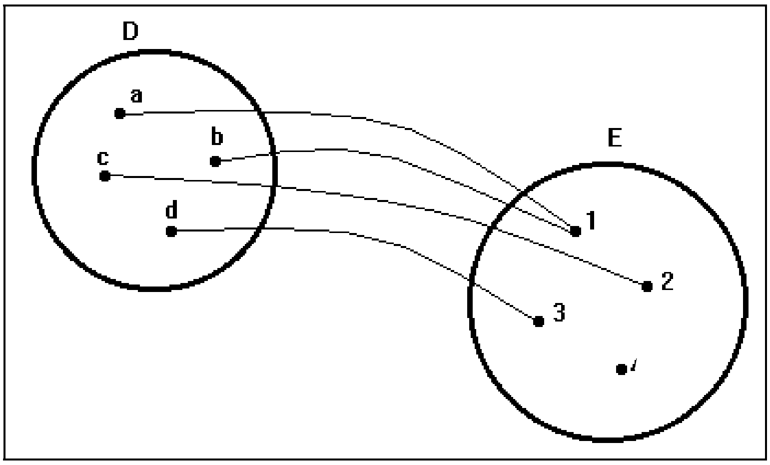
2. Funções

2.1 – Introdução

É comum nos depararmos com situações onde o valor de uma quantidade depende de outra. Como por exemplo, A demanda de um certo produto pode depender de seu preço de mercado; o lucro de uma empresa pode depender de sua receita e de seu custo; o tamanho de uma criança pode depender de sua idade; a quantidade de poluentes no ar pode depender do número de carros e indústrias da região. Muitas vezes, tais relações podem ser representadas (modeladas) através de funções matemáticas. Então podemos definir:

Função é uma regra que associa cada objeto de um conjunto D a exatamente um objeto de um outro conjunto E.

E podemos representar uma função **f** pelo diagrama abaixo:



Observe, pela figura, que cada elemento ***x*** do conjunto ***D*** está associado a apenas um elemento do conjunto ***E***, o qual podemos chamar de **imagem de *x*** e representá-lo por ***f*(*x*)**, pois é o resultado da transformação de ***x*** pela função ***f***.

O conjunto ***D*** é chamado de **domínio** da função. O conjunto ***E*** é chamado de **contra-domínio** da função.

No nosso curso, ***D*** e ***E*** serão sempre conjuntos de números reais.

Normalmente, a função ***f*** é definida utilizando-se uma fórmula matemática, por exemplo:

$$f(x) = x^2 + 3$$

É muito comum também, vermos a variável **y** substituindo **f(x)**:

$$y = x^2 + 3$$

Neste caso, ***y*** é chamada **variável dependente** e ***x*** **variável independente**, pois o valor de ***y*** é resultado do emprego da fórmula para um determinado valor de ***x***, ou seja, o valor de **y** depende do valor de **x**.

Logo, se quisermos saber qual o número que está associado ao número 2 pela fórmula acima, basta fazer:

$$f(2) = 2^2 + 3 = 7$$

Ex.: 1) Determine, se possível, f(27), f(2) e f(1), se $f(x) = (x - 2)^{1/2}$

Resolução:

Sabemos que $(x - 2)^{1/2} = \sqrt{x-2}$, então podemos escrever: $f(x) = \sqrt{x-2}$, logo:

$f(27) = \sqrt{27-2} = \sqrt{25} = 5$

$f(2) = \sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0$

$f(1) = \sqrt{1-2} = \sqrt{-1} \notin \Re$

2) Determine *f(–1), f(1) e f(2),* se $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & , se \;\; x < 1 \\ 3x^2 + 1 & , se \;\; x \geq 1 \end{cases}$

Resolução:

Da primeira fórmula, temos:

$f(-1) = \dfrac{1}{-1-1} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

Da segunda fórmula, temos:

$f(1) = 3.\,1^2 + 1 = 4$

$f(2) = 3.2^2 + 1 = 13$

Observe no primeiro exemplo, que se **x** assumir determinados valores, por exemplo, ***x = 1***, a função não poderá ser calculada. Então, é importante conhecermos o conjunto de valores para os quais a função poderá ser calculada, que é o **Domínio** da função. Para determinarmos esse conjunto, é preciso obedecer duas primícias básicas da matemática, que chamaremos de **CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA**, lembrando que trataremos apenas com número reais.

1ª – Em uma fração, denominador deve ser sempre diferente de ZERO ($\neq 0$).
2ª – Em uma raiz de índice par, o radicando deve ser sempre maior ou igual a ZERO (≥ 0).

Ex.: 3) Determine o domínio das funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

c) $f(x) = \sqrt{x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}}{1-x}$

Resolução:

a) Não há qualquer restrição, portanto, $D = \Re$

b) Neste caso, devemos obedecer a primeira restrição: $2x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$. Logo:

$$D = \{ x \in \Re \;/\; x \neq \frac{1}{2} \} \text{ ou } D = \Re - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

c) Neste caso, devemos obedecer a segunda restrição: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
$D = \{ x \in \Re \mid x \geq 2\}$ ou $D = [2, \infty)$

d) Este é um caso típico onde devemos satisfazer às duas restrições:
1ª) $1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
2ª) $4 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$
Logo, unindo as duas respostas, temos:
$D = \{ x \in \Re \mid x \neq 1 \text{ e } x \geq -4\}$ ou $D = [-4, \infty) - \{1\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 – Calcule os valores indicados das funções abaixo:

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$; $f(1)$, $f(0)$, $f(-2)$

b) $h(t) = (2t + 1)^3$; $h(-1)$, $h(0)$, $h(1)$

c) $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $g(-1)$, $g(1)$, $g(2)$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; $f(2)$, $f(0)$, $f(-1)$

e) $h(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 4}$; $h(2)$, $h(0)$, $h(-4)$

f) $g(x) = \sqrt{(x+1)^3}$; $g(0)$, $g(-1)$, $g(8)$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$; $f(1)$, $f(5)$, $f(13)$

h) $h(x) = \begin{cases} 2x+4 & se\ x \leq 1 \\ x^2+1 & se\ x > 1 \end{cases}$; $h(3)$, $h(1)$, $h(0)$, $h(-3)$

i) $f(t) = \begin{cases} 3 & se\ t < -5 \\ t+1 & se\ -5 \leq t \leq 5 \\ \sqrt{t} & se\ t > 5 \end{cases}$; $f(-6)$, $f(-5)$, $f(0)$, $f(16)$

2 – Especifique o domínio das funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 5$

b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x + 2}$

c) $f(t) = \dfrac{t + 1}{t^2 - t - 2}$

d) $g(t) = \dfrac{2t - 1}{t^2 + 2t + 5}$

e) $f(x) = \sqrt{3 - x}$

f) $g(x) = \sqrt{3x + 8}$

g) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{3x - 12}}$

h) $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 2}}$

RESPOSTAS

1 – a) $f(1) = 6$; $f(0) = -2$; $f(-2) = 0$
b) $h(-1) = -1$; $h(0) = 1$; $h(1) = 27$
c) $g(-1) = -2$; $g(1) = 2$; $g(2) = 5/2$
d) $f(2) = 2/5$; $f(0) = 0$; $f(-1) = -1/2$
e) $h(2) = 2\sqrt{3}$; $h(0) = 2$; $h(-4) = 2\sqrt{3}$
f) $g(0) = 1$; $g(-1) = 0$; $g(8) = 27$
g) $f(1) = 1$; $f(5) = 1/27$; $f(13) = 1/125$
h) $h(3) = 10$; $h(1) = 6$; $h(0) = 4$; $h(-3) = -2$
i) $f(-6) = 3$; $f(-5) = -4$; $f(0) = 1$; $f(16) = 4$

2 – a) $D = \Re$
b) $D = \{x \in \Re \mid x \neq -2\}$
c) $D = \{x \in \Re \mid x \neq 2 \text{ e } x \neq -1\}$
d) $D = \Re$
e) $D = \{x \in \Re \mid x \leq 3\}$
f) $D = \{x \in \Re \mid x \geq -8/3\}$
g) $D = \{x \in \Re \mid x > 4\}$
h) $D = \Re$

2.2 – Aplicação

Numa situação prática, não costumamos usar ***x*** e ***y***, mas letras que sugerem as grandezas em questão, por exemplo, ***C*** – custo, ***q*** – quantidade, ***R*** – receita, ***L*** – lucro, etc.

Ex.: 4) Suponha que o custo total de fabricação de q unidades de uma certa mercadoria seja dada pela função $C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$

a) Calcule o custo de fabricação de 10 unidades da mercadoria.
b) Calcule o custo de fabricação da 10ª unidade da mercadoria.

Resolução:

a) O custo de fabricação de 10 unidades é o valor da função custo total quando q = 10.

Logo: $C(10) = 10^3 - 30.10^2 + 500.10 + 200 = 3200.$

O custo para fabricar 10 unidades da mercadoria é de R$3.200,00

b) O custo de fabricação da 10ª unidade é a diferença entre o custo de fabricação de 10 unidades e o custo de fabricação de 9 unidades.

Então, como $C(9) = 9^3 - 30.9^2 + 500.9 + 200 = 2999$, *temos:*

$C(10) - C(9) = 3200 - 2999 = 201{,}00$

O custo para fabricar a 10ª unidade é de R$201,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 – Suponha que o custo total para se fabricar q unidades de um certo produto seja dado pela função $C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 500$

a) Calcule o custo de fabricação de 20 unidades.
b) Calcule o custo de fabricação da 20ª unidade.

2 – Um estudo sobre a eficiência de operários do turno da manhã de uma certa fábrica indica que um operário médio, que chega ao trabalho às 8 horas da manhã, monta, x horas depois de iniciado o expediente, $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ rádios transistores.

a) Quantos rádios o operário terá montado às 10 horas da manhã?
b) Quantos rádios o operário terá montado entre 9 e 10 horas da manhã?

3 – Suponha que às t horas do dia, a temperatura em uma certa cidade seja de

$$C(t) = -\frac{1}{6}t^2 + 4t + 10 \text{ graus centígrados.}$$

a) Qual era a temperatura às 14 horas?
b) De quanto a temperatura aumentou ou diminuiu, entre 18 e 21 horas?

4 – Suponha que a população de uma certa comunidade do interior, daqui a t anos, será de

$$P(t) = 20 - \frac{6}{t+1} \text{ milhares de habitantes.}$$

a) Daqui a 9 anos, qual será a população da comunidade?
b) De quanto a população crescerá durante o 9° ano?
c) A medida em que o tempo vai passando, o que acontecerá à população? Ela ultrapassará os 20.000 habitantes?

5 – Suponha que o número necessário de homens-hora para distribuir catálogos de telefone novos entre x porcento dos moradores de uma certa região seja dado pela função $f(x) = \dfrac{600x}{300 - x}$.

a) Qual o domínio da função f?
b) Para que valores de x, no contexto do problema, $f(x)$ tem interpretação prática?

c) Quantos homens-hora são necessários para distribuir catálogos novos entre os primeiros 50% dos moradores?
d) Quantos homens-hora são necessários para distribuir catálogos novos na comunidade inteira?
e) Que porcentagem dos moradores da comunidade recebeu catálogos novos, quando o número de homens-hora foi 150?

6 – Durante a última Campanha Nacional de Vacinação, representantes do Ministério da Saúde constataram que o custo para vacinar *x* porcento da população infantil era de, aproximadamente, $f(x) = \dfrac{150x}{200 - x}$ milhões de reais.
a) Qual o domínio da função *f*?
b) Para que valores de *x*, no contexto do problema, *f(x)* tem interpretação prática?
c) Qual foi o custo para vacinar os primeiros 50% das crianças?
d) Qual foi o custo para que os 50% restantes fossem vacinados?
e) Que porcentagem foi vacinada, ao terem sido gastos 37,5 milhões de reais?

7 – Uma instituição iniciou um programa para arrecadação de fundos. Estima-se que serão necessárias $f(x) = \dfrac{10x}{150 - x}$ semanas para arrecadar x porcento do valor desejado.
a) Qual o domínio da função *f*?
b) Para que valores de *x*, no contexto do problema, *f(x)* tem interpretação prática?
c) Qual o tempo necessário para arrecadar 50% do valor desejado?
d) Qual o tempo necessário para arrecadar 100% do valor desejado?

8– Uma bola foi jogada de cima de um edifício. Sua altura, depois de *t* segundos, é de, $H(t) = -16t^2 + 256$ metros.
a) Em que altura estará a bola depois de 2 segundos?
b) Que distância a bola terá percorrido no 3° segundo?
c) Qual a altura do edifício?
d) Quando a bola atingirá o chão?

RESPOSTAS

1 – a) R$ 4.500
b) R$ 371,00

2 – a) 46 rádios
b) 26 rádios

3 – a) 33,33° C
b) diminuiu 7,5° C

4 – a) 19.400 habitantes
b) 67 habitantes
c) A população crescerá a cada ano, mas nunca ultrapassará aos 20.000 habitantes.

5 – a) $D = \{ x \in \Re \mid x \neq 300\}$
b) $0 \leq x \leq 100$
c) 120 homens-hora
d) 300 homens-hora
e) 60% da população

6 – a) $D = \{ x \in \Re \mid x \neq 200\}$
b) $0 \leq x \leq 100$
c) 50 milhões de reais
d) 100 milhões de reais
e) 40% da população infantil

7 – a) $D = \{ x \in \Re \mid x \neq 150\}$
b) $0 \leq x < 150$
c) 5 semanas
d) 20 semanas

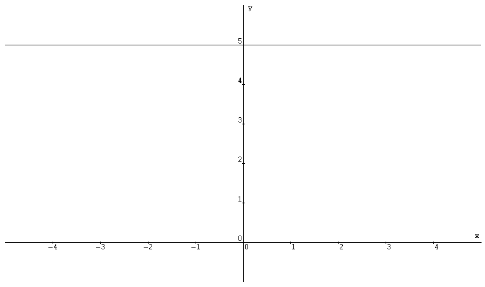
8 – a) 192 metros
b) 80 metros
c) 256 metros
d) 4 segundos

2.3 – Funções Usuais

2.3.1 – Função Constante: y = k

Seja k um número real qualquer, essa função é aquela que representa sempre o mesmo valor para y, independente do valor de x. Sua representação gráfica é uma reta paralela ao eixo-x e que passa pelo ponto y = k.

Ex.: 5) *f(x) = 5.*
Então, f(0) = 5, f(1) = 5, ou seja, o valor da função é sempre 5 independente do valor de x.
Seu gráfico será:



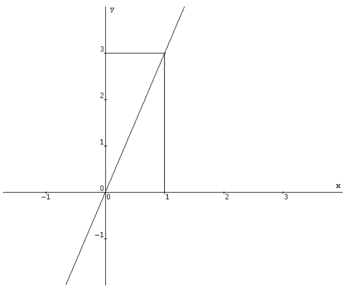
2.3.2 – Função Linear (Função do 1° Grau)

É uma função do tipo ***f(x) = mx + b***. Sua representação gráfica é uma reta, onde ***m***, que é o **coeficiente angular**, indica a inclinação ou a direção da reta, e ***b***, que é o **coeficiente linear**, indica o ponto onde a reta intercepta o eixo-y. Para construí-la, é necessário que tenhamos 2 pontos, então, damos dois valores aleatórios para ***x*** e calculamos o valor de ***y*** correspondente. Colocamos esses pontos no plano e traçamos a reta.

Ex.: 6) Trace o gráfico das funções abaixo:

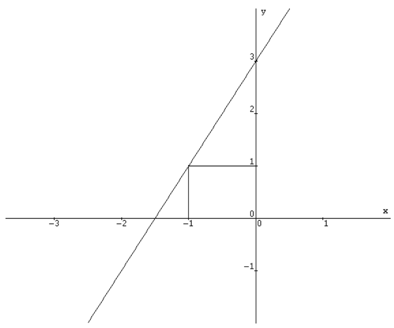
a) *y = 3x*

x	***y***
0	*0*
1	*3*



b) *y = 2x + 3*

x	***y***
0	*3*
– 1	*1*



Uma característica muito importante da função linear é que a variação do ***y*** é sempre a mesma quando o ***x*** varia de uma unidade. Por exemplo, seja a função anterior *f(x) = 2x + 3*. Vamos fazer uma tabela com alguns valores de *x* (variando de 1 a 1) e seus respectivos *y*:

x	*y*
-1	*1*
0	*3*
1	*5*
2	*7*
3	*9*

Observe, que, à medida que o *x* varia de uma em uma unidade, o *y* varia sempre de 2 em 2.

Vejamos ainda, outro exemplo: *f(x) = 2 – 3x*

x	*y*
– 1	*5*
0	*2*
1	*– 1*
2	*– 4*
3	– 7

Note que neste exemplo, o *x* varia de 1 em 1 enquanto o *y* varia de – 3 em – 3. A variação do *y* não é a mesma do exemplo anterior, mas durante este exemplo, ela não se modifica, mantendo-se sempre uma queda de três unidades entre um *y* e o posterior, desde que *x* aumente de uma unidade.

Note também que essa variação, tanto neste exemplo quanto no anterior, é igual ao coeficiente angular das retas que representam ambas as funções. Então podemos concluir que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2.3.2.1 – Equação da reta dados dois pontos

Nós conhecemos dois pontos, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, e o nosso objetivo é, a partir deles, determinar a equação da reta, *y = mx + b*, que passa por eles. E, para isso, necessitamos calcular os valores de ***m*** e ***b***.

Ex.: 7) Calcule a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (1 , 3)$ e $P_2 = (3 , 7)$

Podemos resolver esse problema de duas formas:

1ª) Sistema de Equações Lineares:

Substituímos os valores de x e y dos pontos na equação da forma y = mx + b. Então:

$$P_1 = (1 , 3) \Rightarrow 3 = m + b$$

$$P_2 = (3 , 7) \Rightarrow 7 = 3m + b$$

Resolvendo esse sistema encontramos os valores m = 2 e b = 1. Logo a equação é ***y = 2x + 1***

2ª) Fórmula do coeficiente angular

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \dfrac{7-3}{3-1} = 2$

*Então, y = 2x + b. Agora, substituímos um dos dois pontos para calcular **b**, por exemplo, o primeiro ponto:*

$P_1 = (1\ ,\ 3) \Rightarrow 3 = 2{\times}1 + b \Rightarrow b = 1.$

*Portanto, a equação é **y = 2x + 1***

2.3.2.2 – Equação da reta dados um ponto e o coeficiente angular.

Nós conhecemos um ponto, $P_1(x_1, y_1)$ e o coeficiente angular ***m***, e o nosso objetivo é, a partir deles, determinar a equação da reta, *y* = *mx* + *b*, que passa por eles. E, para isso, necessitamos calcular o valor de ***b***.

Ex.: 8) Calcule a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (3\ ,\ 8)$ e cujo coeficiente angular é *m = – 2.*

*Podemos resolver esse problema apenas substituindo os dados que temos na equação da reta, **y = mx + b**. Como já sabemos que m = – 2, basta substituir o ponto nos valores de x e y:*

$y = -2x + b \Rightarrow 8 = -2 .\ 3 + b \Rightarrow b = 14$

Portanto, a equação procurada é y = – 2x + 14

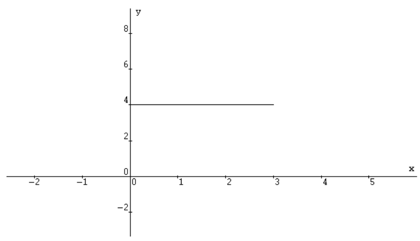
2.3.2.3 – Funções restritas a subconjuntos de números reais.

Embora o domínio dessas funções seja todo o conjunto dos números reais, em aplicações práticas, essas funções podem estar restritas a subconjuntos de números reais.

Ex.: 9) Trace o gráfico das seguintes funções:

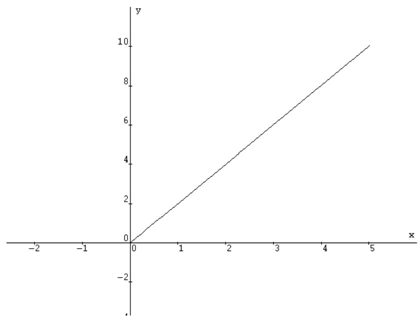
a) y = $4,\ \ 0 \le x \le 3$

x	y
0	4
3	4



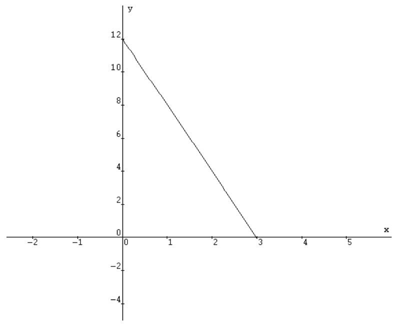
b) $y = 2x,\ 0 < x < 5$

x	y
0	0
5	10



c) $y = -4x + 12$, $0 \leq x \leq 3$

x	y
0	12
3	0



2.3.2.4 – Interseção entre duas funções.

Para determinar o ponto de interseção entre duas funções, basta igualar as suas equações e resolver a equação resultante.

Ex.: 10) Calcule o ponto de interseção das funções $y = 2x + 3$ e $y = -3x - 7$.

Resolução:

Devemos igualar as duas funções e resolver a equação resultante:

$2x + 3 = -3x - 7 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2$

Agora, devo substituir o valor de x encontrado em qualquer uma das duas funções dadas, para encontrar o valor de y, por exemplo, na primeira função:

$y = 2.(-2) + 3 \Rightarrow y = -1$

Logo, o ponto de interseção das retas acima é o ponto (– 2, – 1)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 – Represente graficamente as retas dadas abaixo:

a) $y = 2x - 6$, $0 \leq x \leq 5$
b) $y = 10$, $-1 < x < 1$
c) $y = 5 - 3x$, $-2 \leq x \leq 3$
d) $y = 2{,}5x$, $x \geq 0$

2 – Calcule o ponto de interseção das retas abaixo:

a) $y = 2x + 5$ e $y = 3x$
b) $y = 100 - \frac{1}{2}x$ e $y = 2x - 50$
c) $y = 2x - 4$ e $y = 3x + 2$
d) $y = 3x + 5$ e $y = 3 - x$
e) $y = 5x - 14$ e $y = 4 - x$
f) $y = 3x + 8$ e $y = 3x - 2$

3 – Escreva a equação que passa pelos seguintes pontos:

a) $P_1(0,0)$ e $P_2(2,4)$
b) $P_1(0,3)$ e $P_2(8,3)$
c) P_1 $(0,20)$ e P_2 $(12,0)$
d) P_1 $(2,10)$ e P_2 $(8,1)$
e) P_1 $(2,-3)$ e P_2 $(0,4)$
f) P_1 $(-1,2)$ e P_2 $(2,5)$

4 – Escreva a equação da reta que passa pelo ponto P e têm coeficiente angular m:

a) $P(0,0)$ e $m = -2$
b) $P(2,7)$ e $m = 1/2$
c) $P(3,10)$ e $m = -1$
d) $P(7,1)$ e $m = 0$
e) $P(-1,2)$ e $m = 2/3$
f) $P(5,-2)$ e $m = -1/2$

RESPOSTAS

2 – a) (5, 15)
b) (60, 70)
c) (– 6, – 16)
d) (– 1/2, 7/2)
e) (3, 1)
f) não existe

3 – a) y = 2x
b) y = 3
c) $y = -\frac{5x}{3} + 20$
d) $y = -\frac{3x}{2} + 13$

e) $y = -\frac{7x}{2} + 4$
f) y = x + 3

4 – a) y = – 2x
b) $y = \frac{x}{2} + 6$
c) y = – x + 13
d) y = 1
e) $y = \frac{2x}{3} + \frac{8}{3}$
f) $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

2.3.3 – Função de 2° Grau (Função Quadrática)

É a função dada por $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$. Sua representação gráfica é uma parábola cujos principais pontos são:

a) Cruzamento com o eixo-x: *(x', 0)* e *(x'', 0)*

b) Vértice: $V = (x_v, y_v)$ cujas coordenadas são dadas por: $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

Observe que, se $\boldsymbol{a > 0}$, a parábola terá sua **concavidade para cima**, ao passo que, se $\boldsymbol{a < 0}$, ela terá **concavidade para baixo**.

Ex.: 11) Construa o gráfico das funções abaixo:

a) $y = x^2 - 6x + 8$

Resolução:

a.1) Cruzamento com o eixo-x:

$\Delta = (-6)^2 - 4.1.8 = 36 - 32 = 4$

$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow x' = 4$ *e*

x'' = 2

Então os pontos são: (4, 0) e (2, 0)

a.2) Vértice:

$x_v = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

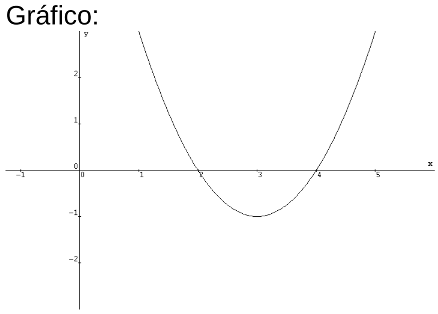
$y_v = \frac{-4}{4.1} = -1$

V = (3, – 1)

Então temos a seguinte tabela:

x	*y*
2	*0*
4	*0*
3	*– 1*

Gráfico:



b) $y = 10x - x^2$

Resolução:

b.1) Cruzamento com o eixo-x:

$\Delta = (10)^2 - 4.(-1).0 = 100$

$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x' = 0$ *e* $x'' = 10$

Então os pontos são: (0, 0) e (10, 0)

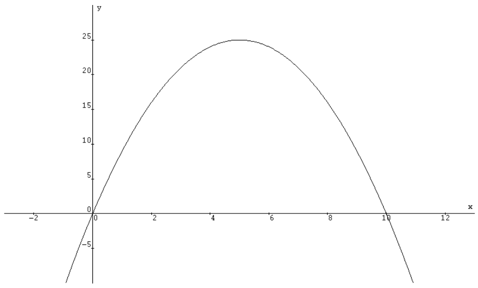
b.2) Vértice:

$x_v = \frac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5$

$y_v = \frac{-100}{4.(-1)} = 25$

V = (5, 25)

x	*y*
0	*0*
10	*0*
5	*25*



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 – Represente graficamente as funções dadas abaixo:

a) $y = 4 - x^2$

b) $y = -x^2 + 8x - 17$

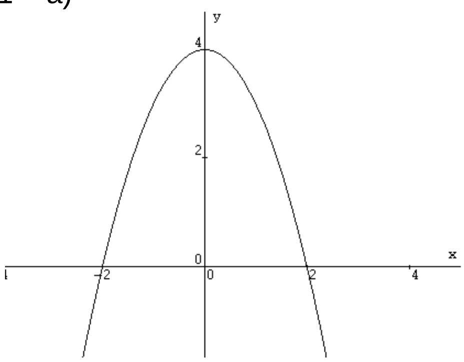
c) $y = x^2 + 1$

d) $y = x^2 + 3x - 10$

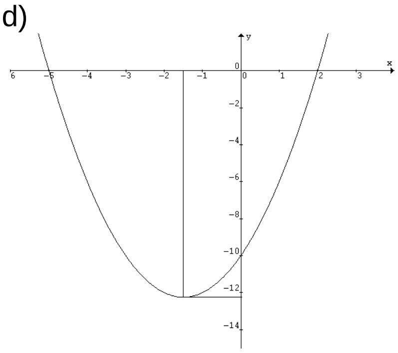
e) $y = -x^2 + 3x - 10$

RESPOSTAS

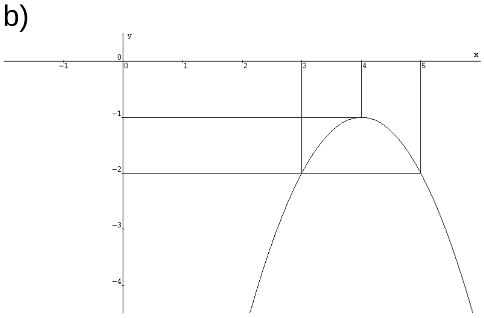
1 – a)



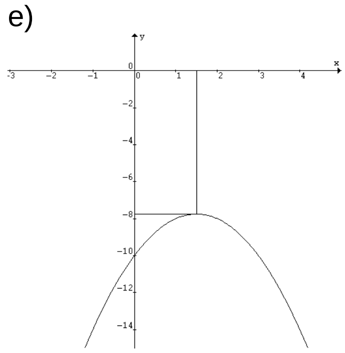
d)



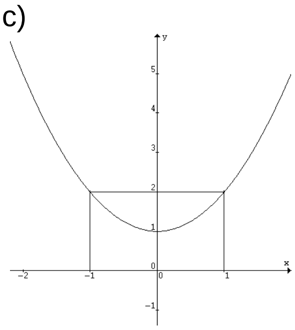
b)



e)



c)



2.4 – Aplicações de funções de 1º e de 2º graus

2.4.1 –Receita, Custo e Lucro Total

A receita total R_T obtida pela venda de uma certa quantidade ***q*** de um determinado produto cujo preço é ***P*** é dada pela função $R_T = P.q$ que é a função receita.

Com relação ao custo para fabricar uma quantidade q de um certo produto, teremos que analisar os dados e tentar determinar a função que melhor se adapte aos dados. No nosso caso, trataremos de problemas lineares, portanto, nossa função custo total é dada por $C_T = C_F + C_V$, onde:

C_T = Custo total
C_F = Custo fixo (custo inicial)
C_v = Custo variável (custo unitário $\times$ quantidade)

A função lucro total L_T, que está associada à produção (custo) e venda (receita) de uma certa utilidade é dada por: $L_T = R_T - C_T$**.** Observe que, se o resultado dessa função for negativo, significa que, ao invés de lucro, houve prejuízo.

O ponto onde as duas funções se igualam ($R = C$) é chamado **ponto de nivelamento ou break-even point**. Observe que para quantidades menores que a quantidade relativa ao ponto de nivelamento, haverá prejuízo para o fabricante, pois o custo será maior que a receita; mas se a quantidade produzida for maior que a quantidade relativa ao ponto de nivelamento, o fabricante terá lucro.

Ex.: 1) O custo total de um fabricante consiste em uma quantia fixa de R$ 200,00 somada ao custo de produção, que é de R$ 50,00 por unidade. Expresse o custo total como função do número de unidades produzidas e construa o gráfico.

2) Um fabricante vende a unidade de certo produto por R$110,00. O custo total consiste em uma taxa fixa de R$7.500,00 somada ao custo de produção de R$60,00 por unidade.
a) Construa as funções receita e custo e lucro total.
b) Quantas unidades o fabricante precisa vender para atingir o ponto de nivelamento?
c) Se forem vendidas 100 unidades, qual será o lucro ou prejuízo do fabricante?
d) Quantas unidades o fabricante precisa vender para obter um lucro de R$1.250,00
e) Construa, no mesmo par de eixos, os gráficos das funções receita e custo.

2.4.2 – Demanda de Mercado

Seja **U** uma utilidade (bem ou serviço) e seja ***D(p)*** a demanda ou procura de mercado desta utilidade a um preço ***p***, isto é, a soma das quantidades que **todos** os compradores do mercado estão dispostos e aptos a adquirir a um preço ***p***, em determinado período de tempo, que pode ser um dia, uma semana, um mês etc.

Função ***demanda*** é a função que associa um preço p à demanda ou procura de mercado. A representação gráfica dessa curva é a **curva de demanda da utilidade.**

Observe que para que haja demanda, é necessário que $p > 0$ e $D(p) > 0$**.**

Ex.: 3) Suponha que a demanda de mercado de um produto, que é vendido em pacotes de 10 kg, seja dada por $D(p) = 4.000 - 50p$
a) Determine o intervalo de variação de p.
b) Represente essa função graficamente.
c) Determine o valor da demanda para p = R$600 e p = R$40,00
d) A que nível estará o preço se a demanda for de 3.500 pacotes?
e) A que preço a demanda será menor que 1.000 pacotes?
f) A que preço a demanda será maior que 3.000 pacotes?
g) Determine a função despesa do consumidor.
h) Represente a função despesa graficamente.

2.4.3 – Oferta de Mercado

Oferta ***S(p)*** de mercado de uma utilidade cotada a um preço ***p*** é a soma das quantidades que **todos** os produtores estão dispostos e aptos a vender ao preço ***p***, durante certo período de tempo.

A função que associa todo preço p à respectiva oferta de mercado é a ***função oferta de mercado***. Sua representação gráfica constitui a ***curva de oferta*** da utilidade. Para que haja oferta, é necessário, naturalmente, que ***S(p) > 0***.

Ex.: 4) Suponha que a oferta de mercado de um produto, seja dada por $S(p) = 2p - 30$, com $p \leq 130$.
a) A partir de que preço haverá oferta?
b) Represente graficamente a função.
c) A que preço a oferta será de 100 unidades?
d) A que preço a oferta será maior que 150 unidades?
e) A que preço a oferta será menor que 200 unidades?

2.4.4 – Preço e quantidade de equilíbrio

Lei da oferta e da procura: O preço de mercado *p* de um produto indica o número de unidades que o fabricante deseja vender, assim como o número de unidades que o consumidor deseja comprar. Na maioria dos casos, à medida que o preço p de mercado aumenta, a oferta *S(p)* aumenta e a demanda *D(p)* diminui.

O ***preço de equilíbrio de mercado*** (PE) é o preço para o qual a demanda e a oferta de mercado coincidem **(*D(p) = S(p)*)**. A quantidade correspondente ao preço de equilíbrio é ***a quantidade de equilíbrio de mercado*** (QE).

Se para uma determinada quantidade, a oferta for maior que a procura haverá excesso do produto, caso contrário, haverá escassez do mesmo.

Ex.: 5) Dadas as funções demanda de mercado $D(p) = 20 - p$ e a oferta $S(p) = -\frac{20}{3} + \frac{5}{3}p$, com $p \leq 20$, determine o preço de equilíbrio (PE) e a correspondente quantidade de equilíbrio (QE).

2.4.5 – Geral

Neste ponto, daremos início a aplicações gerais de funções de lineares e de como encontrar as funções apropriadas para cada situação. Para isso, faremos a seguinte observação com relação à função de 1º grau:

- Se a taxa de variação de uma quantidade com respeito à outra for constante, a função que relaciona tais quantidades é **linear** e a essa taxa de variação constante é o **coeficiente angular** da reta correspondente.

Ex.: 6) Desde o começo do ano, o preço dos pães integrais em um supermercado tem aumentado a uma taxa constante de R$ 0,02 por mês. Em 1º de março, o preço era de R$ 1,06 por unidade.
a) Expresse o preço do pão em função do tempo.
b) Determine o preço do pão no dia 01/05
c) Determine o preço do pão no início do ano.
d) Trace o gráfico da função.

7) A média dos pontos obtidos em um teste psicotécnico aplicado em determinada empresa vem decrescendo constantemente nos últimos anos. Em 1995, a média foi de 582, enquanto em 2000, foi de apenas 552 pontos.
a) Exprima a média relativa ao teste, em função do tempo.
b) Se a tendência atual se mantiver, qual será a média de pontos obtidos em tal teste em 2005?
c) Se a tendência atual se mantiver, Quando a média de pontos será de 528 pontos?
d) Trace o gráfico da função.

8) O aluguel de um carro numa agência é de R$40,00 mais R$0,80/km rodado. Uma segunda agência cobra R$100,00 mais R$0,50/km rodado. Que agência oferece o melhor plano de aluguel?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Uma fábrica de móveis vende mesas por R$70,00 cada. O custo total de produção consiste de um sobretaxa de R$8.000,00 somada ao custo de produção de R$30,00 por mesa.
a) Construa as funções receita e custo e lucro total.
b) Quantas unidades o fabricante precisa vender para atingir o ponto de nivelamento?
c) Se forem vendidas 250 mesas, qual será o lucro ou prejuízo do fabricante?
d) Quantas unidades o fabricante precisa vender para obter um lucro de R$6.000,00
e) Construa, no mesmo par de eixos, os gráficos das funções receita e custo.

2) Um artesão têm um gasto fixo de R$600,00 e, em material, gasta R$25,00 por unidade produzida. Se cada unidade for vendida por R$175,00:
a) Construa as funções receita e custo e lucro total.
b) Quantas unidades o artesão precisa vender para atingir o ponto de nivelamento?
c) Quantas unidades o artesão precisa vender para obter um lucro de R$450,00

3) Um grupo de amigos, que moraram nos EUA, deseja montar um curso de inglês. Eles observaram que, teriam um gasto fixo mensal de R$1.680,00 e, gastariam ainda R$ 24,00, em materiais e pagamento de professores, por aluno. Cada aluno deverá pagar R$40,00.
a) Quantos alunos o curso necessita ter para que não haja prejuízo?
b) Qual será o lucro ou prejuízo do curso, se obtiverem 70 alunos?

c) Quantos alunos o curso precisa ter para atingir um lucro de R$592,00?

4) Num restaurante, a moqueca é servida por R$10,00 e o preço da cerveja é de R$1,80. Em outro, a moqueca é servida por R$12,00, mas a cerveja custa R$1,40. Ache um critério para decidir qual restaurante você irá, se forem levadas em conta apenas considerações de ordem financeira e supondo que você peça apenas uma moqueca.

5) Um bombeiro hidráulico cobra uma taxa de R$31,00 e mais R$2,60 a cada meia hora de trabalho. Um outro cobra R$25,00 e mais R$3,20 a cada meia hora. Ache um critério para decidir que bombeiro chamar, se forem levadas em conta apenas considerações de ordem financeira.

6) Uma agência de aluguel de carros cobra uma diária de R$ 25,00 mais R$ 0,30 por quilômetro rodado.
a) Expresse o custo de alugar um carro dessa agência por um dia em função do número de quilômetros dirigidos e construa o gráfico.
b) Quanto custa alugar um carro para uma viagem de 200 km de um dia?
c) Quantos quilômetros foram percorridos se o custo do aluguel diário foi de R$ 45,20 centavos?
7) Quando o preço de um certo produto for de p reais, um lojista espera oferecer S = 4p + 300 produtos, enquanto a demanda local é de $D = -2p + 480.$
a) Para que preço de mercado a oferta será igual a demanda local?
b) Quantos produtos serão vendidos por este preço?
c) Se o preço for de R$ 20,00, haverá excesso ou escassez do produto? De quanto?
d) Construa os dois gráficos no mesmo par de eixos.

8) As funções oferta e procura de um determinado produto são dadas, respectivamente, por $S = p^2 + 3p - 70$ e $D = 410 - p$.
a) Para que preço de mercado a oferta será igual à demanda?
b) Quantos produtos serão vendidos por este preço?
c) Se o preço for de R$25,00 haverá excesso ou escassez do produto? De quanto?
d) Construa os dois gráficos no mesmo par de eixos.

9) Suponha que a demanda de mercado de um produto, seja dada por $D(p) = 45 - 5p$ unidades, onde p é o preço por unidade do bem.
a) Determine o intervalo de variação de p.
b) Represente essa função graficamente.
c) Determine o valor da demanda para p = R$ 5,00
d) A preço a demanda será de 30 pacotes?
e) A que preço a demanda será menor ou igual a 10 pacotes?
f) A que preço a demanda será maior ou igual a 35 pacotes?
g) Determine a função despesa do consumidor.
h) Represente a função despesa graficamente.

10) Suponha que a demanda de mercado de um produto seja dada por $D(p) = 16 - p^2$, onde p é o preço por unidade
a) Determine o intervalo de variação de p.
b) Represente essa função graficamente.
c) Determine o valor da demanda para p = R$ 2,00

11) A demanda de mercado de um certo produto, que é vendido em galões, é dada pela seguinte função $D(p) = 8000 - 100p$.
a) Determine o intervalo de variação de p.

b) Represente graficamente a função demanda
c) Calcule os valores da demanda correspondentes aos preços p = R\$ 40,00, p = R\$ 50,00 e p = R\$ 75,00.
d) A que preço a demanda será de 4.500 galões?
e) A que preços a demanda será menor que 2.000 galões?
f) A que preços a demanda será maior que 5.000 galões?
g) A que preços a demanda ficará entre 5.500 e 6.500 galões?
h) Determine a função despesa do consumidor.
i) Represente a função despesa graficamente.

12) A demanda de mercado de um certo produto é dada pela função $D(p) = -p^2 - p + 56$.
a) Represente graficamente a função demanda
b) Determine o intervalo de variação de p.
c) Qual o valor da demanda se o preço for R\$ 6,00?
d) A que preço a demanda será de 44 unidades?

13) Seja a oferta de mercado de uma utilidade dada por $S = -200 + 2p$, com $p \leq$ R\$ 270,00
a) A partir de que preço haverá oferta?
b) Construa o gráfico da função.
c) Qual o valor da oferta se p = R\$ 270,00?
d) A que preço a oferta será de 180 unidades?
e) A que preços a oferta será maior que 150 unidades?
f) A que preços a oferta será menor que 250 unidades?
g) Para que preços a oferta ficará entre 200 e 300 unidades?

14) Considere a oferta dada pela função $S = p^2 - 64$, com $p \leq 20$.
a) A partir de que preço haverá oferta?
b) Qual o valor da oferta para p = R\$ 20,00?
c) A que preço a oferta será de 297 unidades?
d) A que preço a oferta será de 57 unidades?
e) Trace o gráfico da curva oferta.

15) Seja a oferta de mercado de uma utilidade dada por $S = -30 + 2p$, com $p \leq$ R\$ 100,00
a) A partir de que preço haverá oferta?
b) Construa o gráfico da função.
c) Qual o valor da oferta se p = R\$ 27,00?
d) A que preço a oferta será de 80 unidades?
e) A partir de que preço a oferta será maior que 50 unidades?
f) A partir de que preço a oferta será menor que 150 unidades?
g) Para que preços a oferta ficará entre 20 e 70 unidades?

16) Determine o preço e a quantidade de equilíbrio nos seguintes casos:
a) $D = 34 - 5p$, $S = -8 + 2p$
b) $\mathrm{D} = 10 - 0{,}2\ \mathrm{p}$, $\mathrm{S} = -11 + \frac{1}{2}\mathrm{p}$
c) $D = 32 - p^2$, $S = p^2 - 18$
d) $D = 56 - p^2$, $S = p^2 - 16$

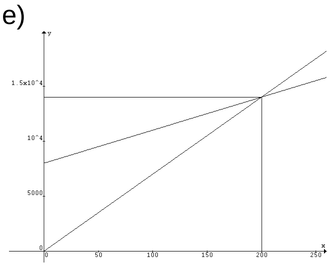
17) Um produtor compra R\$ 20.000,00 em máquinas, que se depreciam linearmente de tal forma que seu valor de troca após 10 anos é de R\$ 5.000,00.
a) Expresse o valor das máquinas em função do seu tempo de uso e trace o gráfico.

b) Calcule o valor das máquinas após 4 anos.

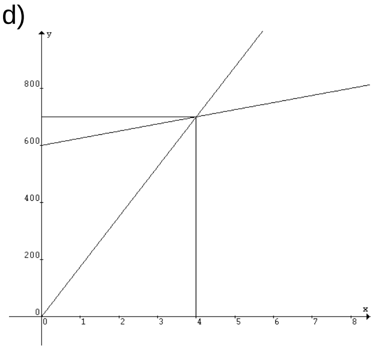
18) Desde o começo do mês, um reservatório local está perdendo água a uma taxa constante. No décimo segundo dia do mês, o reservatório contém 200 milhões de litros de água e, no vigésimo primeiro dia, 164 milhões de litros.
a) Expresse a quantidade de água no reservatório em função do tempo e trace o gráfico.
b) Quanta água estava no reservatório no primeiro dia do mês?
c) Quanta água estava no reservatório no vigésimo quinto dia do mês?

RESPOSTAS

1 – a) R = 70q
C = 8000 + 30q
L = 40q – 8000
b) 200
c) lucro de R$ 2000,00
d) 350
e)



2 – a) R = 175q
C = 600 + 25q
L = 150q – 600
b) 4
c) 7
d)



3 – a) 105
b) prejuízo de R$ 560,00
c) 142

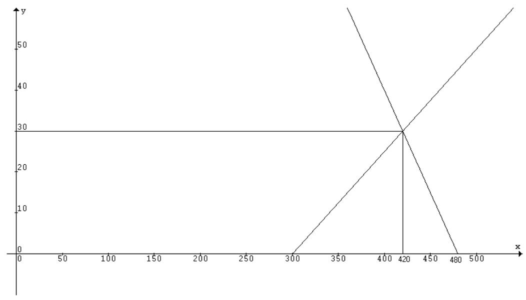
4 – Se tomar 5 cervejas, tanto faz o primeiro ou o segundo. Se tomar mais de 5 cervejas, o melhor é o segundo e se tomar menos de 5 cervejas, o melhor é o primeiro restaurante.

5 – Se o serviço durar 5 horas, tanto faz o primeiro ou o segundo. Se durar mais de 5 horas, o melhor é o segundo e se durar menos de 5 horas, o melhor é o primeiro bombeiro.

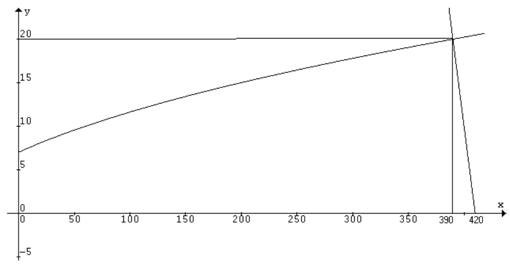
6 – a) *C = 25 + 0,30x*
b) R$ 85,00
c) 67,3 km

y = (x - 300)/4 {300,1000}

7 – a) R$ 30,00
b) 420
c) escassez de 60 produtos
d)



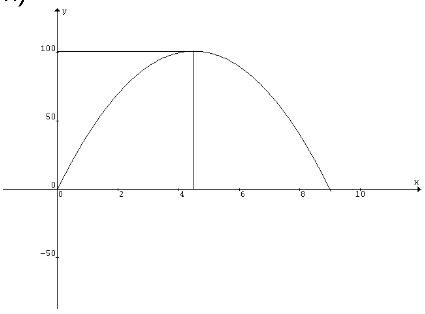
8 – a) R$ 20,00
b) 390
c) excesso de 245 produtos
d)



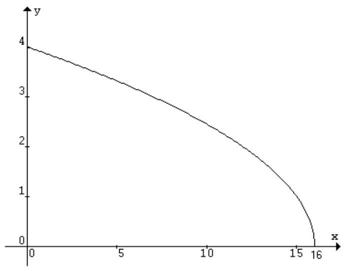
9 – a) 0 < p < 9

b)

c) 20
d) R$ 3,00
e) $7 < p < 9$
f) $0 < p \leq 2$
g) $D_e(p) = 45p - 5p^2$, $0 < p < 9$
h)

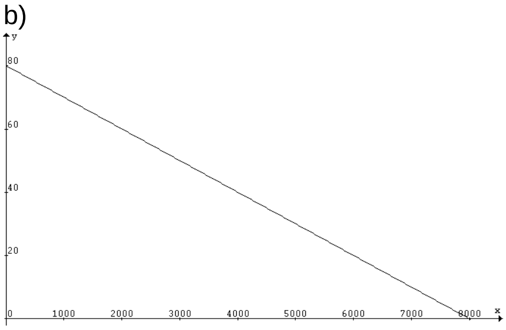


10 – a) 0 < p < 4
b)



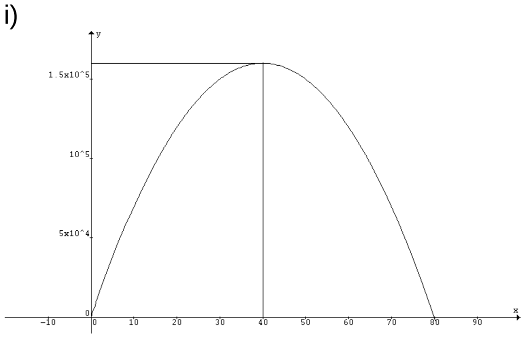
c) 12

11 – a) $0 < p < 80$
b)

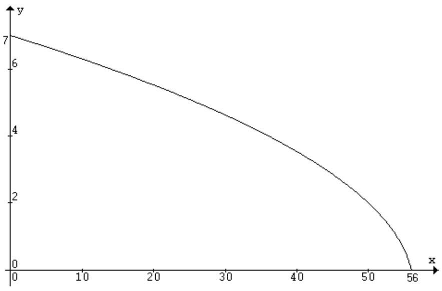


c) 4.000, 3.000 e 500 respectivamente.
d) R$ 35,00
e) $60 < p < 80$
f) $0 < p < 30$
g) $15 < p < 25$

h) $D_e(p) = 8000p - 100p^2$, $0 < p < 80$
i)

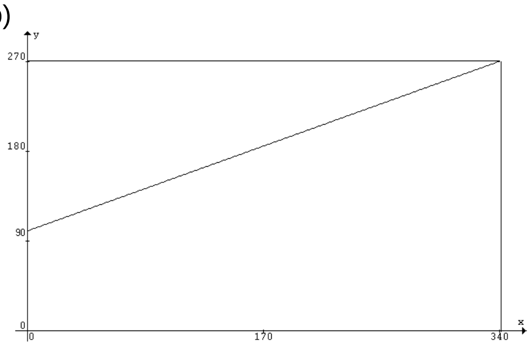


12 – a)



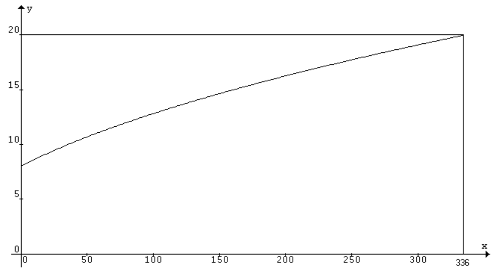
b) $0 < p < 7$
c) 14
d) R$ 3,00

13 – a) R$ 100,00
b)

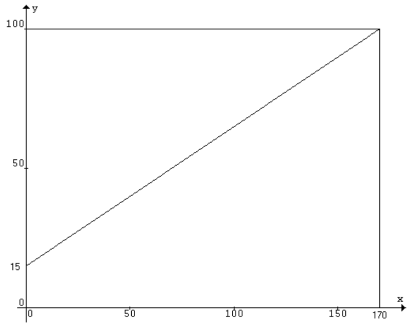


c) 340
d) R$ 190,00
e) $175 < p \leq 270$
f) $100 < p < 225$
g) $200 < p < 250$

14 – a) R$ 8,00
b) 336
c) R$ 19,00
d) R$ 11,00
e)



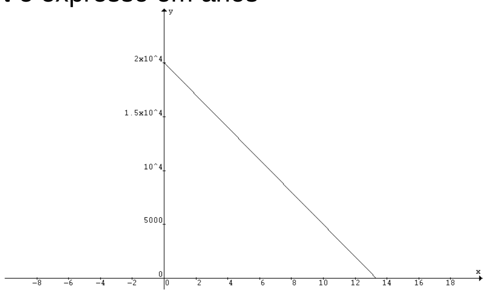
15 – a) R$ 15,00
b)



c) 24
d) R$ 55,00
e) $40 < p \leq 100$
f) $15 < p < 90$
g) 25 < p < 50

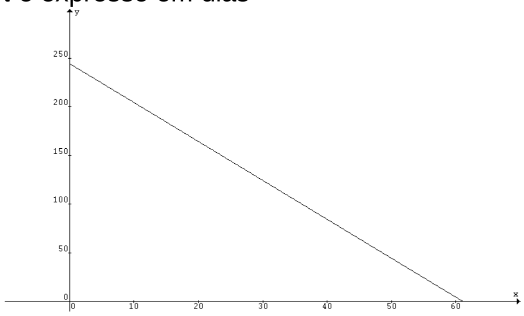
16 – a) p = R$ 6,00 e q = 4
b) p = R$ 30,00 e q = 4
c) p = R$ 5,00 e q = 7
d) p = R$ 6,00 e q = 20

17 – a) *f(t) = 20000 – 1500t*
t é expresso em anos



b) R$ 14.000,00

18 – a)*f(t)* = 244 – 4t
t é expresso em dias



b) 244 milhões de litros
c) 148 milhões de litros