



Curso:
ADMINISTRAÇÃO

Matemática Aplicada

ALUNO(A): _____

Gilmar Bornatto
2011

FUNÇÕES MATEMÁTICAS APLICADAS À ECONOMIA

Constantemente encontramos em nosso cotidiano situações envolvendo relações entre duas grandezas variáveis. Vejamos alguns exemplos:

- (a) O total mensal da conta de Água pago à Sanepar é uma relação entre a quantidade consumida e o valor da conta.
- (b) A receita obtida no final do mês na venda de um determinado produto pelo comerciante é uma relação entre a quantidade vendida e o preço de venda do produto.
- (c) O salário de um trabalhador que ganha por horas trabalhadas, é uma relação entre as horas que ele trabalhou e o valor pago por hora
- (d) O consumo de combustível de um carro, é uma relação com a quantidade de quilômetros rodados pelo carro.

FUNÇÃO CUSTO

Para compor uma função custo geralmente temos uma série de fatores, como, por exemplo, o **custo fixo** (aluguel, seguro, impostos, etc) e o **custo variável** em função da quantidade produzida de determinada mercadoria.

Podemos expressá-la por:

$$\text{Custo Total} = \text{Custo Fixo} + \text{Custo Variável}$$

FUNÇÃO RECEITA

A função receita é composta com a quantidade arrecadada com a venda de x unidades de um determinado produto, isto é: a quantidade multiplicada pelo valor unitário.

$$\text{Receita} = \text{Quantidade} \times \text{preço}$$

FUNÇÃO LUCRO

Um produtor ou vendedor obtém seu lucro (ou a função lucro), retirando o custo do valor arrecadado com a receita::

$$\text{Lucro} = \text{Receita} - \text{Custo}$$

FUNÇÃO DEMANDA

Considere as circunstâncias relativas a um fabricante, nas quais as únicas variáveis são **preço p** e a **quantidade** de mercadorias demandadas **x** , portanto a função **demanda** é uma relação entre a quantidade demandada **x** e o preço **p** .

Em geral quando o preço é baixo, os consumidores procuram mais a mercadoria e vice-versa.

FUNÇÃO OFERTA

Assim como a demanda, a oferta também pode ser expressa por uma função, relacionando-se preço e quantidade oferecida de uma mercadoria. A função oferta é crescente, pois quando o preço sobe, existem mais produtores interessados em colocar no mercado quantidades cada vez maiores de seu produto, quando o preço cai, essa oferta diminui.

PONTO DE EQUILÍBRIO

Também chamado de Ponto de Nivelamento ou *break-even*.

É utilizado na administração e na Economia, para analisar as implicações de várias decisões de fixação de preços e produção.

Matematicamente é quando:

$$\text{Oferta} = \text{Demanda} \text{ ou } \text{Custo} = \text{Receita}$$

FUNÇÃO UTILIDADE

A função utilidade pretende medir a satisfação de um consumidor em função da quantidade consumida de certo bem ou serviço.

CURVA DO ORÇAMENTO

Quando se conhecem o orçamento (verba disponível) de um consumidor e os preços dos produtos que pretende comprar, pode-se estabelecer uma relação entre as quantidades desses produtos que podem ser adquiridos por ele com essa verba

FUNÇÃO PRODUÇÃO

A função produção Total ou *função produção* dá a quantidade produzida na unidade de tempo como função de um conjunto de fatores, chamados insumos de produção, tais como capital, trabalho, matéria-prima.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

- Uma fábrica de móveis vende mesas por R\$70,00 cada. O custo total de produção consiste de um sobretaxa de R\$8.000,00 somada ao custo de produção de R\$30,00 por mesa.
 - Construa as funções receita e custo e lucro total.
 - Quantas unidades o fabricante precisa vender para atingir o ponto de nivelamento?
 - Se forem vendidas 250 mesas, qual será o lucro ou prejuízo do fabricante?
 - Quantas unidades o fabricante precisa vender para obter um lucro de R\$6.000,00
 - Construa, no mesmo par de eixos, os gráficos das funções receita e custo.
- Um artesão tem um gasto fixo de R\$600,00 e, em material, gasta R\$25,00 por unidade produzida. Se cada unidade for vendida por R\$175,00:
 - Construa as funções receita e custo e lucro total.
 - Quantas unidades o artesão precisa vender para atingir o ponto de nivelamento?
 - Quantas unidades o artesão precisa vender para obter um lucro de R\$450,00
- Um grupo de amigos, que moraram nos EUA, deseja montar um curso de inglês. Eles observaram que, teriam um gasto fixo mensal de R\$1.680,00 e, gastariam ainda R\$ 24,00, em materiais e pagamento de professores, por aluno. Cada aluno deverá pagar R\$40,00.
 - Quantos alunos o curso necessita ter para que não haja prejuízo?
 - Qual será o lucro ou prejuízo do curso, se obtiverem 70 alunos?
- Em um posto de combustível, o preço da gasolina é de \$1,50 por litro.
 - Determine uma expressão que relacione o valor pago (V) em função da quantidade de litros (x) abastecidos por um consumidor.
 - Supondo que o tanque de combustível de um carro comporte 50 litros, calcule o valor total pago pelo consumidor utilizando a expressão encontrada no item anterior.
- Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos A e B dados em cada item:
 - A(1,15) e B(4,30)
 - A(2, 18) e B(6,6)
 - A(-2,10) e B(6,30)
- Um produto, quando comercializado, apresenta as funções custo e receita dadas, respectivamente, por $C(x) = 3x + 90$ e $R(x) = 5x$, onde x é a quantidade comercializada que se supõe ser a mesma para custo e receita.
 - Em um mesmo sistema de eixos, esboce os gráficos de custo e receita. Determine também e indique no gráfico o *break-even point*.
 - Obtenha a função Lucro, L(x) e determine as quantidades necessárias para que o lucro

seja negativo (prejuízo), nulo e positivo.

7. Um fabricante vende a unidade de certo produto por R\$110,00. O custo total consiste em uma taxa fixa de R\$7.500,00 somada ao custo de produção de R\$60,00 por unidade.

- Construa as funções receita e custo e lucro total.
- Quantas unidades o fabricante precisa vender para atingir o ponto de nivelamento?
- Se forem vendidas 100 unidades, qual será o lucro ou prejuízo do fabricante?
- Quantas unidades o fabricante precisa vender para obter um lucro de R\$1.250,00
- Construa, no mesmo par de eixos, os gráficos das funções receita e custo.

8. Determine o ponto de nivelamento (ou ponto crítico) e esboce os gráficos da função receita e custo em cada caso:

- $R(x) = 4x$ e $C(x) = 50 + 2x$
- $R(x) = 200x$ e $C(x) = 10000 + 150x$
- $R(x) = (1/2)x$ e $C(x) = 20 + (1/4)x$

1. Podemos dizer que “o preço de equilíbrio de um produto corresponde ao valor em que a procura por parte dos consumidores se iguala ao que é oferecido por parte dos fornecedores, ou seja, quando a demanda é igual à oferta”.

Considerando as funções demanda e oferta respectivamente: $y = -x + 4$ e $y = 2x + 1$

- Calcule algebricamente o ponto de equilíbrio entre oferta e demanda.
- Represente em um mesmo sistema de eixos, os gráficos da oferta e da demanda e indique no gráfico o *break-even point*.

2. Suponha que o custo fixo de produção de um artigo seja R\$ 450,00. O custo variável igual a 60 por cento do preço de venda, que é de R\$ 15,00 por unidade. Qual é a quantidade para se atingir o ponto de equilíbrio?

3. A curva de demanda de um artigo é $x = 10 - \frac{y}{4}$. Assuma que y representa o preço e x a quantidade.

- Ache a quantidade demandada se o preço é de R\$ 25,00
- Ache o preço se a quantidade demandada é de 7 unidades
- Qual é o preço mais alto que poderá ser pago por este artigo?
- Que quantidade poderá ser demandada se o artigo for oferecido gratuitamente?

4. O custo de um certo produto, no mercado, é dado por $C(x) = 6,00 + 3,00x$, sendo x o número de unidades produzidas. Qual é o custo de 2.000 unidades desse produto?

5. Um fabricante produz uma certa mercadoria por R\$ 0,90 a unidade, vendendo-a por R\$1,50 a unidade. Quantas unidades devem ser vendidas para se ter um lucro de R\$ 2.400,00?

6. Ao preço de R\$ 5,00 por unidade, uma empresa oferecerá mensalmente 5.000 lanternas de pilha; a R\$ 3,50 por unidade ela oferecerá 2.000 unidades. Determine a equação da função de oferta para este produto.
7. O custo mensal de uma fábrica que produz esquis é de R\$ 4.200, e o custo variável de R\$ 55 por par de esquis. O preço de venda é de R\$ 105.
- Se x unidades são vendidas durante um mês, expresse o lucro mensal como uma função de x .
 - Se 600 pares forem vendidos em um mês, qual será o lucro.
 - Quantas unidades precisam ser vendidas para não haver prejuízo durante um mês ?
8. Sabendo-se que a função custo total para fabricar determinada mercadoria é dada por $C(x) = x^3 + x^2 + 2x + 100$, sendo x a quantidade produzida, calcule:
- O custo total para produzir 5 unidades dessa mercadoria;
 - O custo total para produzir 10 unidades dessa mercadoria
 - A função custo médio e o custo médio para produzir 5 unidades dessa mercadoria.
9. O consumo de energia elétrica para uma residência no decorrer dos meses é dado por $E(t) = t^2 - 8t + 210$, onde o consumo E é dado em Kwh e ao tempo associa-se $t = 0$ a Janeiro, $t = 1$ a fevereiro, e assim sucessivamente.
- Determine o(s) mês(es) em que o consumo é de 195 Kwh.
 - Qual o consumo mensal médio (considere a média aritmética dos meses do ano) para o primeiro ano?
10. Calcule os pontos de interseção dos gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x$.
11. Um fabricante consegue vender a unidade de um produto por \$80,00. O custo total consiste em uma sobretaxa de \$4500,00 somada ao custo da produção de \$50,00 por unidade.
- Quantas unidades o fabricante precisa vender para existir o nivelamento?
 - Qual será o lucro do fabricante se ele vender 500 unidades?
 - Quantas unidades o fabricante terá que vender para obter um lucro de \$9.000,00
12. Calcule o preço de equilíbrio e o número correspondente de unidades em oferta e procura, sabendo que a função oferta de um certo produto é $f(x) = x^2 + 3x - 70$ e a função procura (demanda) é $f(x) = 410 - x$.
13. A função receita é dada por $R(x) = x^2 + 4x + 100$ e a função custo por $C(x) = x + 80$, sendo x a quantidade.
- Determine a função lucro **L(x)**
 - Qual o lucro para uma quantidade demandada igual a 10?

14. As funções de oferta e demanda de um produto são respectivamente:
 $y = 2x + 80$ e $y = -4x + 200$.
- Determine a quantidade e o preço de equilíbrio.
 - Represente graficamente as funções oferta e demanda e o ponto de equilíbrio.
 - Para que valores de x o preço de oferta excede o preço de demanda?
15. Sabe-se que o custo mensal fixo de uma indústria que produz relógios de parede é R\$ 8.500 e que o custo variável é R\$ 10 por relógio fabricado. O preço de venda é de R\$ 80 por relógio.
- Se x relógios são vendidos durante um mês, qual é o custo mensal y como função de x ?
 - Qual é o lucro no mês de julho se 500 relógios foram vendidos neste mês?
16. Um fabricante consegue vender a unidade de um produto por R\$ 80. O custo total consiste em uma sobretaxa de R\$ 4.500 somada ao custo da produção de R\$ 50 por unidade:
- Quantas unidades o fabricante precisa vender para existir o nivelamento?
 - Qual será o lucro ou prejuízo do fabricante, se forem vendidas 200 unidades?
 - Quantas unidades o fabricante necessita vender para obter um lucro de R\$ 900?
17. Sabe-se que a equação de demanda de um bem é dada por $x = 200 - 4p$, sendo o custo associado $C = 4p - 12$. Determinar:
- A função receita total, traçando o gráfico correspondente;
 - O ponto de *break-even**
 - A função lucro
18. Sabe-se que o custo C para produzir x unidades de um certo produto é dado por $C(x) = x^2 - 80x + 3000$. Nestas condições calcule:
- A quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo.
 - O valor mínimo do custo.
19. Uma editora pretende lançar um livro e estima que a quantidade vendida será 20.000 unidades por ano. Se o custo fixo de fabricação for R\$ 150.000,00 por ano, e o variável por unidade de R\$20,00, qual o preço mínimo que deverá cobrar pelo livro para não ter prejuízo?
20. Determine o preço de equilíbrio de mercado nas seguintes situações:
- oferta: $p = 10 + x$, demanda: $p = 20 - x$
 - oferta: $p = 3x + 20$, demanda: $p = 50 - x$

* Ponto de Equilíbrio.

21. Uma doceira produz um tipo de bolo de tal forma que sua função de oferta diária é $p = 10 + 0,2x$.
- (a) Qual o preço para que a oferta seja de 20 bolos diários?
 - (b) Se o preço unitário for R\$15,00 qual é a oferta diária?
 - (c) Se a função de demanda diária por esses bolos for $p = 30 - 1,8x$, qual o preço de equilíbrio?
22. O consumo nacional total é dado (em bilhões de dólares) pela equação $c = 4,5 + 0,9y_d$ onde y_d é a renda disponível. Se a renda disponível é 15 (em bilhões de dólares).
- (a) Qual é o consumo total?
 - (b) Que proporção do consumo total representa o consumo da renda disponível?
23. Um fabricante vende a unidade de certo produto por R\$110,00. O custo total consiste em uma taxa fixa de R\$7.500,00 somada ao custo de produção de R\$60,00 por unidade.
- (a) Quantas unidades o fabricante precisa vender para atingir o ponto de equilíbrio?
 - (b) Se forem vendidas 100 unidades, qual será o lucro ou o prejuízo do fabricante?
 - (c) Quantas unidades o fabricante necessita vender para obter um lucro de R\$1.250,00?
24. A função de demanda de um produto é $p = 10 - x$, e a função custo é $C = 20 + x$. Vamos obter:
- a) A função receita
 - b) A função Lucro
 - c) O preço que maximiza o lucro.
25. Um bombeiro hidráulico cobra uma taxa de R\$31,00 e mais R\$2,60 a cada meia hora de trabalho. Um outro cobra R\$25,00 e mais R\$3,20 a cada meia hora. Ache um critério para decidir que bombeiro chamar, se forem levadas em conta apenas considerações de ordem financeira.
26. Uma agência de aluguel de carros cobra uma diária de R\$ 25,00 mais R\$ 0,30 por quilômetro rodado.
- a) Expresse o custo de alugar um carro dessa agência por um dia em função do número de quilômetros dirigidos e construa o gráfico.
 - b) Quanto custa alugar um carro para uma viagem de 200 km de um dia?
 - c) Quantos quilômetros foram percorridos se o custo do aluguel diário foi de R\$ 45,20 centavos?
27. Quando o preço de um certo produto for de p reais, um lojista espera oferecer $S = 4p + 300$ produtos, enquanto a demanda local é de $D = -2p + 480$.
- a) Para que preço de mercado a oferta será igual a demanda local?
 - b) Quantos produtos serão vendidos por este preço?
 - c) Se o preço for de R\$ 20,00, haverá excesso ou escassez do produto? De quanto?
 - d) Construa os dois gráficos no mesmo par de eixos.

28. As funções oferta e procura de um determinado produto são dadas, respectivamente, por $S = p^2 + 3p - 70$ e $D = 410 - p$.
- Para que preço de mercado a oferta será igual à demanda?
 - Quantos produtos serão vendidos por este preço?
 - Se o preço for de R\$25,00 haverá excesso ou escassez do produto? De quanto?

“A questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos”

Aristóteles

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

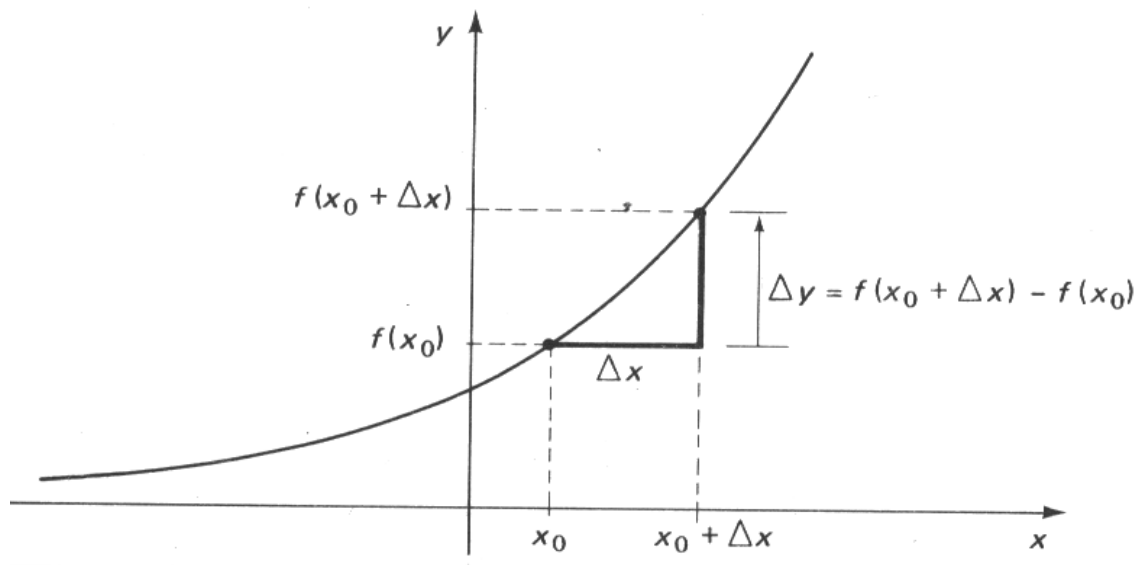
O desenvolvimento dos estudos matemáticos acompanhou a necessidade do homem de conhecer melhor o universo físico que o cerca. Particularmente, o Cálculo teve sua aplicação estendida aos fenômenos físicos mensuráveis como, por exemplo, eletricidade, ondas de rádio, som, luz, calor e gravitação.

A **derivada** é parte fundamental do Cálculo. A partir de agora faremos um estudo sobre esse assunto.

O conceito de derivada foi introduzido no século XVII quase simultaneamente pelo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Sir Isaac Newton (1642-1727), trabalhando separadamente.

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

Consideremos uma função f contínua e definida num intervalo $]a, b[$; sejam x_0 e $x_0 + \Delta x$ dois pontos desse intervalo. Quando a variável x passa do valor x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$ sofrendo uma variação Δx (incremento de x), o correspondente valor da função passa de $f(x_0)$ para o valor $f(x_0 + \Delta x)$ sofrendo, portanto, uma variação Δy (incremento da função f), onde $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ conforme mostra a figura seguinte:



Dizemos que a **derivada da função f no ponto x_0** é

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{se ele existir e for finito.}$$

Nesse caso, dizemos também que f é derivável no ponto x_0 .

NOTAÇÕES DA DERIVADA

A derivada de f será indicada por uma das quatro formas abaixo:

$$f'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad y'$$

EXEMPLOS

1) Calcular a derivada da função $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 2$.

Solução

Calculando $f(x_0)$ e $f(x_0 + \Delta x)$, temos:

$$f(x_0) = x_0^2 \Rightarrow f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(x_0 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 = 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2$$

Substituindo na definição de derivada:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2] - (4)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (4 + \Delta x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4 \end{aligned}$$

Portanto: $f'(2) = 4$

2) Determinar a derivada da função $f(x) = 4x^2 + 1$, através da definição.

Solução

Calculando $f(x_0)$ e $f(x_0 + \Delta x)$, temos:

$$f(x_0) = 4x_0^2 + 1$$

$$f(x_0 + \Delta x) = 4 \cdot (x_0 + \Delta x)^2 + 1 = 4 \cdot [(x_0)^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2] + 1 =$$

$$= 4x_0^2 + 8x_0\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 1$$

Substituindo na definição de derivada:

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[4x_0^2 + 8x_0\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 1] - [4x_0^2 + 1]}{\Delta x} \\
 f'(x_0) &= \frac{4x_0^2 + 8x_0\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 1 - 4x_0^2 - 1}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8x_0\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(8x_0 + 4\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8x_0 + 4\Delta x) = \\
 &= 8x_0 + 4 \cdot 0 = 8x_0
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x_0) = 8x_0$

EXERCÍCIOS:

1) Determine a função derivada através da definição.

- a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$;
- b) $f(x) = x^2 - 8x + 9$
- c) $f(x) = x^3 - x$;
- d) $f(x) = x^2 + 1$, no ponto $x_0 = 5$
- e) $f(x) = 3x^2$, no ponto $x_0 = 2$
- f) $f(x) = x^2$, no ponto $x_0 = 1$
- g) $f(x) = 2x^2 - 2$, no ponto $x_0 = 3$

RESPOSTAS:

- 1) a) $f'(x) = 2x - 2$ b) $2x - 8$ c) $3x^2 - 1$ d) 10 e) 12 f) 2 g) 12

FÓRMULAS OU REGRAS DE DERIVAÇÃO

Até agora, vimos como calcular a derivada de uma função por meio da definição. Entretanto, como esse processo é demasiado longo, estudaremos algumas regras que nos permitirão calcular a derivada de uma função mais facilmente.

Faremos a demonstração de apenas algumas dessas regras, pela aplicação da definição de derivada. As outras regras também podem ser demonstradas pelo mesmo processo.

Vejam algumas **derivadas fundamentais**.

a) Derivada da função constante:

$$\text{Se } y = f(x) = c \text{ então } y' = f'(x) = 0.$$

Demonstração

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k - k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Se x é um ponto qualquer de \mathbb{R} temos:

Exemplos

$$1) y = -5 \Rightarrow y' = (-5)' = 0$$

$$2) y = 3 \Rightarrow y' = (3)' = 0$$

b) Derivada da função identidade:

$$\text{Se } y = f(x) = x \text{ então } y' = f'(x) = 1.$$

Demonstração

Se x é um ponto qualquer de \mathbb{R} , temos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

c) Derivada do produto de uma constante por uma função

Se $y = c \cdot g(x)$ então $y' = c \cdot g'(x)$.

Demonstração

Se x é um ponto qualquer de \mathbb{R} , temos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cg(x + \Delta x) - cg(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot [g(x + \Delta x) - (g(x))]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = c \cdot g'(x)$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot g'(x)$$

Exemplos

1) $y = 5x \Rightarrow y' = (5x)' = 5(x)' = 5 \cdot 1 = 5$

2) $y = -3x \Rightarrow y' = (-3x)' = -3$

3) $y = -x \Rightarrow y' = -1$

d) Derivada da função potência $y = x^n$

Se $y = x^n$ então $y' = n \cdot x^{n-1}$ para n inteiro positivo.

Exemplos

1) $y = x^5 \Rightarrow y' = 5 x^{5-1} = 5x^4$

2) $y = 2x^4 \Rightarrow y' = 2 \cdot 4x^{4-1} = 8x^3$

3) $y = -\frac{x^2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x^3 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 = -x^2$

4) $y = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow y' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

5) $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow y' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

e) **Derivada da função** $y = \sqrt[n]{x}$

<p>Se $y = \sqrt[n]{x}$ então $y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{(x)^{n-1}}}$, $x \neq 0$.</p>
--

Esta fórmula só pode ser aplicada quando o radicando é a variável x (função identidade).

Exemplos

1) $y = \sqrt[5]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

2) $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $y = 8\sqrt[4]{x} \Rightarrow y' = \frac{8}{4\sqrt[4]{x^3}} = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$

f) Derivada da soma de funções

“A derivada da soma é igual à soma das derivadas”.

$$\text{Se } y = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x) \text{ então } y' = g_1'(x) + g_2'(x) + \dots + g_n'(x).$$

Exemplos

$$1) y = 3x^2 + 5x + 4 \Rightarrow y' = (3x^2 + 5x + 4)'$$

$$y' = (3x^2)'+ (5x)' + (4)' = 6x + 5 + 0 = 6x + 5$$

$$2) y = 4x^3 + 5x^2 + 3 \Rightarrow y' = 12x^2 + 10x$$

g) Derivada da diferença

“A derivada da diferença é igual à diferença das derivadas”.

$$\text{Se } y = g(x) - h(x) \text{ então } y' = g'(x) - h'(x).$$

Exemplos

$$1) y = 3x^2 - 5x \Rightarrow y' = (3x^2 - 5x)'$$

$$y' = (3x^2)' - (5x)' = 6x - 5$$

$$2) y = 4x^3 - 5x^2 - 3 \Rightarrow y' = 12x^2 - 10x$$

h) Derivada do produto

Seja $y = u(x) \cdot v(x)$.

Se existem as derivadas $u'(x)$ e $v'(x)$, então $y' = u'v + uv'$.

Exemplos

1) $y = (2x - 3) \cdot (x^2 + 5)$

2) $y = \sqrt{x} \cdot (1 - 3x^2)$

$y' = (2x - 3)' \cdot (x^2 + 5) + (2x - 3) \cdot (x^2 + 5)'$

$y' = (\sqrt{x})' \cdot (1 - 3x^2) + \sqrt{x} \cdot (1 - 3x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1 - 3x^2) + \sqrt{x} \cdot (-6x)$

$y' = 2 \cdot (x^2 + 5) + (2x - 3) \cdot 2x$

$y' = \frac{1 - 3x^2}{2\sqrt{x}} - 6x\sqrt{x}$

$y' = 2x^2 + 10 + 4x^2 - 6x$

$y' = 6x^2 - 6x + 10$

i) Derivada do quociente de duas funções

Seja $y = \frac{u(x)}{v(x)}$; se existirem as derivadas $u'(x)$ e $v'(x)$,

então $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, para $v \neq 0$.

Exemplos

1) $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{(1)' \cdot x - 1 \cdot (x)'}{x^2} = \frac{0 - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$ ou

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1} \Rightarrow y' = -1y^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

2) $y = \frac{11 - x^2}{7} = \frac{1}{7}(11 - x^2) \Rightarrow y' = \frac{1}{7}(-2x) = -\frac{2x}{7}$ ou

$y = \frac{11 - x^2}{7} \Rightarrow y' = \frac{(11 - x^2)' \cdot 7 - (11 - x^2) \cdot 7'}{7^2} = \frac{(-2x) \cdot 7 - (11 - x^2) \cdot 0}{7^2} = \frac{(-2x) \cdot 7}{7^2} = -\frac{2x}{7}$

FÓRMULÁRIO DE DERIVAÇÃO

Função	Derivada
$y = f(x) = c$	$y' = f'(x) = 0$
$y = f(x) = x$	$y' = f'(x) = 1$
$y = c \cdot g(x)$	$y' = c \cdot g'(x)$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u'v + uv'$
$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$ <i>para $v \neq 0$</i>

EXERCÍCIOS - DERIVADA

1) Calcular a derivada das funções, usando o formulário da página anterior:

a) $y = 4x + 5$	b) $y = -x + 3$	c) $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{2}$
d) $y = x^2 + 4x + 5$	e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + 7$	f) $y = 0,2x^2 - 4x$
g) $y = (3x^2 - 4x)(6x + 1)$	h) $y = (1 - x^2)(1 + x^2)$	i) $y = (x^2 - 4)(x + 2x^4)$
j) $y = 2(x^3 - 4x^2 + 2x - 1)$	k) $y = \sqrt[4]{x}$	l) $y = \sqrt[9]{x}$
m) $y = \sqrt[3]{x}$	n) $y = \sqrt[6]{x}$	o) $y = -\frac{1}{x}$
p) $y = \frac{6}{x^3}$	q) $y = \frac{15}{2 + x + x^2}$	r) $y = \frac{4x}{x-1}$

s) $y = \frac{10x}{x+2}$

t) $y = \frac{x}{1-x}$

Gabarito

a) $y' = 4$	b) $y' = -1$	c) $y' = \frac{1}{2}$	d) $y' = 2x + 4$
e) $y' = -x + 5$	f) $y' = 0,4x - 4$	g) $y' = 54x^2 - 42x$	h) $y' = -4x^3$
i) $y' = 12x^5 - 32x^3 + 3x^2 - 4$	j) $y' = 6x^2 - 16x + 4$	k) $y' = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$	l) $y' = \frac{1}{9\sqrt{x^8}}$
m) $y' = \frac{1}{3\sqrt{x^2}}$	n) $y' = \frac{1}{6\sqrt{x^5}}$	o) $y' = \frac{1}{x^2}$	p) $y' = -\frac{18}{x^4}$
q) $y' = \frac{-15 - 30x}{(2+x+x^2)^2}$	r) $y' = -\frac{4}{(x-1)^2}$	s) $y' = \frac{20}{(x+2)^2}$	t) $y' = \frac{1}{(1-x)^2}$

2) Determine a derivada das funções:

	Respostas
1) $y = 4x^2 - 2x$	$8x - 2$
2) $y = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x + 5$	$20x^3 - 9x^2 + 4x + 3$
3) $y = 7x^4 - 2x^3 + 8x$	$28x^3 - 6x^2 + 8$
4) $y = \frac{-7x^2}{5} - \frac{\sqrt{3}}{7}$	$\frac{-14x}{5}$
5) $y = \frac{2x^2}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x$	$\frac{4x}{3} + 5x - 4$
6) $y = \frac{7}{x^3}$	$\frac{-21}{x^4}$
7) $y = \frac{4}{x^5}$	$\frac{-20}{x^6}$
8) $y = \sqrt[3]{x^2}$	$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
9) $y = x^2 + \sqrt{x}$	$2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
10) $y = \sqrt[5]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} + x^4$	$\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + 4x^3$

11) $y = 12\sqrt{x^3} + 6\sqrt{x} - 5$	$18\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$
12) $y = \frac{1}{3x-5}$	$\frac{-3}{(3x-5)^2}$
13) $y = \frac{2x}{x+1}$	$\frac{2}{(x+1)^2}$
14) $y = \frac{3x+5}{2x-7}$	$\frac{-31}{(2x-7)^2}$
15) $y = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$	$\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$
16) $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-x+2}$	$\frac{2x^2-4}{(x^2-x+2)^2}$
17) $y = (2x+3)(1-x+x^2)$	$6x^2+2x-1$
18) $y = (1+4x^3)(1+2x^2)$	$40x^4+12x^2+4x$
19) $y = 5x^4 - e^x$	$20x^3 - e^x$
20) $y = \frac{x^3+16}{x^2}$	$\frac{x^3-32}{x^3}$
21) $y = (3x+7)(x^2+8)$	$-3x^2-14x^3+24$

3) Encontre as derivadas das funções a seguir:

(a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 2$	(b) $f(x) = x^3 - 3x$	(c) $f(x) = 5 + x - x^3$
(d) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$	(e) $f(x) = 2x^4 - 4x^2$	(f) $f(x) = -3x^4 - 6x^2$
(g) $f(x) = (x + x^{-1})^2$	(h) $f(x) = 3\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x} + 10$	(i) $f(x) = \frac{1}{x} + 4x$
(j) $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$	(k) $f(x) = x^2 \cdot (x-2)^2$	(l) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
(m) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}$	(n) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{9} + 2x$	(o) $f(x) = (2+x^2)(2-x^2)$
(p) $y = (2x^2 - 3x + 5)(2x - 1)$	(q) $y = 3\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x} + 10$	(r) $y = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}$
(s) $y = \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^2}$	(t) $y = \frac{x-1}{x-2}$	(u) $y = e^{x^2-4x}$

Gabarito

(a) $x^2 - 5x + 4$	(b) $3x^2 - 3$	(c) $1 - 3x^2$
(d) $3x^2 + 2x - 1$	(e) $8x^3 - 8x$	(f) $-12x^3 - 12x$
(g) $2x - \frac{2}{x^3}$	(h) $\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}$	(i) $-\frac{1}{x^2} + 4$

(j) $-\frac{1}{(x-1)^2}$	(k) $4x^3 - 12x^2 + 8x$	(l) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$
(m) $\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}x^{\frac{3}{4}}$	(n) $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{9} + 2$	(o) $-4x^3$
(p) $(4x-3)(2x-1) + (2x^2 - 3x + 5)2$	(q) $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$	(r) $\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}x^{\frac{3}{4}}$
(s) $-6x^{-4} - 10x^{-3}$	(t) $-1/(x-2)^2$	(u) $(2x-4)e^{x^2-4x}$
(v) $(2x+3)e^{x^2+3x-5}$	(x) $-2x.e^{-x^2}$	

4) Calcule a derivada solicitada em relação a variável x.

(a) $f(x) = \sqrt{2}$	(f) $f(x) = -2x^3 + x^2 + 4x - 2$	(k) $f(x) = \frac{-2}{x^2}$
(b) $f(x) = -2x$	(g) $f(x) = (1-x)(1+x)$	(l) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
(c) $f(x) = \frac{x}{4}$	(h) $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$	(m) $y = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 8$
(d) $f(x) = 3x$	(i) $f(x) = \frac{3x-1}{x}$	(n) $y = \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3}$
(e) $f(x) = 3x^3$	(j) $f(x) = \frac{1}{x}$	(o) $y = \frac{x}{x^2+1}$

Gabarito

(a) 0	(b) -2	(c) ¼	(d) 3
(e) $9x^2$	(f) $-6x^2 + 2x + 4$	(g) -2x	(h) $\frac{2(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$
(i) $\frac{1}{x^2}$	(j) $-\frac{1}{x^2}$	(k) $4/x^3$	(l) $\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$
	(m) $6x^2 + 8x - 5$	(n) $-\frac{6}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \frac{9}{x^4}$	(o) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Derivadas de uma Função de Ordem Superior

Exercícios de sala

Obter a derivada terceira das funções:

- a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$
- b) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$
- c) $f(x) = \frac{1}{2x^{-1}}$
- d) $f(x) = 2x^{-3}$

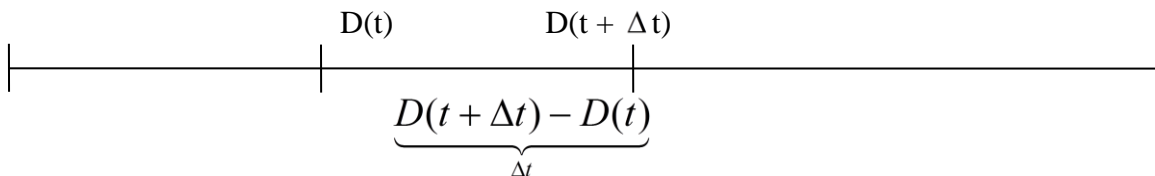
Respostas

- a) 6
- b) 0
- c) 0
- d) $-120x^{-6}$

TAXA DE VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO $f(x)$

A derivada pode entre outras coisas significar a **taxa de crescimento populacional, o custo marginal do produtor, a velocidade de um objeto, a taxa de inflação, etc.**

Vejamos o exemplo da velocidade:



$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Variação da Distância}}{\text{Variação do tempo}} = \frac{D(t + \Delta t) - D(t)}{\Delta t}$$

Velocidade Instantânea é a melhor aproximação da velocidade média.

$$\text{Velocidade Instantânea} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{D(t + \Delta t) - D(t)}{\Delta t} = D'(t)$$

$$\text{Daí podemos generalizar: TAXA DE VARIAÇÃO} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

PORCENTAGEM DE VARIAÇÃO

$$\% = 100 \times \frac{\text{Taxa de Variação}}{\text{Valor de Grandeza}} \quad \text{ou} \quad = 100 \times \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Calcula-se que, daqui a x meses, a população de determinada cidade será de $P(x) = 2x + 4x^{\frac{3}{2}} + 5000$ habitantes.

- Qual será a taxa de variação da população, em relação ao tempo, daqui a 9 meses?
- Qual será a porcentagem de variação da população, em relação ao tempo, daqui a 9 meses?

Solução:

(a) *Taxa de variação = derivada primeira da função*

$$P'(x) = 2 + \frac{3}{2} \cdot 4x^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{x} \Rightarrow P'(9) = 2 + \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{9} = 2 + 18 = 20 \text{ hab/mês}$$

$$(b) \text{ Porcentagem de variação da população } Z = 100 \times \frac{P'(9)}{P(9)}$$

$$\text{Calculando } P(9) = 2 \cdot (9) + 4 \cdot 9^{\frac{3}{2}} + 5000 = 5126$$

$$Z = 100 \times \frac{6,5}{P(9)} = 100 \times \frac{20}{5126} = 0,39\% \text{ por mês.}$$

Aumento Salarial

Suponha que seu salário inicial seja R\$ 2.400,00 e que, anualmente, haverá um aumento de R\$200,00.

- Exprima a porcentagem de variação de seu salário em função do tempo
- Após um ano, qual será a porcentagem de variação de seu salário?
- O que acontecerá com a porcentagem de variação de seu salário com o correr do tempo?

Solução:

(a) A função salário será $S(x) = 2.400 + 200 \cdot x$ (x anos), portanto é só encontrar a derivada

primeira de $S(x) \Rightarrow S'(x) = 200 \Rightarrow$ A porcentagem Z é igual a $100 \times \frac{S'(x)}{S(x)}$, portanto:

$$Z = 100 \times \frac{200}{2400 + 200x} = \frac{200}{2400 + 20x} = \frac{100}{12 + x}$$

(b) Após um ano é só fazer $x = 1$ na fórmula acima: $Z(1) = \frac{100}{12 + 1} = 7,69\%$

(c) Como o denominador da fração vai sempre aumentar o valor da porcentagem irá sempre diminuir, isto é, tenderá a zero.

Exemplo de Aplicação:

Calcula-se que, daqui a x meses, a população de uma certa comunidade será de $P(x) = x^2 + 20x + 8000$ hab. Pede-se:

- A taxa de variação da população daqui a 15 meses?
- A variação real no 16.º mês.

Solução:

(a) Taxa de variação = derivada de $P(x)$ no ponto $x = 15$

$$P'(x) = 2x + 20 \rightarrow P'(15) = 2 \cdot (15) + 20 = 50 \text{ habitantes/mês}$$

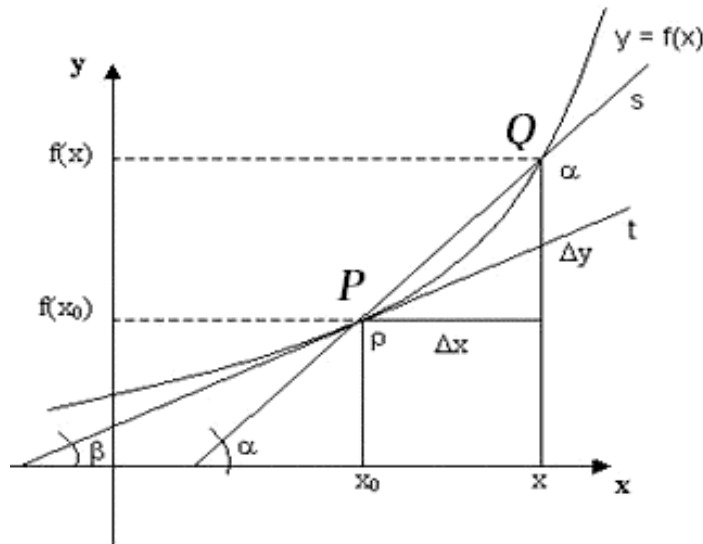
(b) Variação real = Final do 16.º mês menos final do 15.º

$$P(16) = (16)^2 + 20 \cdot (16) + 8000 = 8576 \quad P(15) = (15)^2 + 20 \cdot (15) + 8000 = 8525$$

Variação real = $8576 - 8525 = 51$ habitantes/ mês.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA NUM PONTO:

Seja uma função $f(x)$ contínua e derivável em um domínio D e seja uma representação de seu gráfico na figura a seguir:



Consideremos uma função f e os pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. A reta que passa s pontos P e Q é secante ao gráfico de $f(x)$ e a medida que Δx se aproxima de zero, a reta vai mudando seu coeficiente angular, até que a reta se torna uma reta tangente ao gráfico no ponto P ;

Chamamos a variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (razão incremental) de **TAXA DE VARIAÇÃO DA FUNÇÃO**

E, quando calculamos o limite desse quociente, temos a função derivada de $f(x)$, isto é:

DERIVADA DA FUNÇÃO $f(x)$ é definida por:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} \right]$$

PROBLEMAS DE TAXA

- Estima-se que daqui a x meses a população de uma certa comunidade será de $P(x) = x^2 + 20x + 8000$.
 - Daqui a 15 meses, qual será a taxa de variação da população desta comunidade?
 - Qual será a variação real sofrida durante o 16º mês?
- Avalia-se que, daqui a t anos, a circulação de um jornal local será de $C(t) = 100t^2 + 400t + 5000$ exemplares.

- a. Deduza a expressão da taxa de variação da circulação do jornal daqui a t anos.
 - b. Qual será a taxa de variação da circulação daqui a 5 anos?
 - c. Qual será a variação real da circulação durante o 6.º ano?
3. O produto nacional bruto de um certo país era de $N(x) = t^2 + 5t + 100$ bilhões de dólares t anos após 2000.
- a. Qual era a taxa de variação do produto nacional bruto, em 2005?
 - b. Qual será a taxa de variação do produto nacional bruto, em 2010?
4. Estima-se que, daqui a t anos, a população de uma certa comunidade suburbana será de:
- $$P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$$
- milhares de habitantes.
- (a) Deduza a expressão da taxa de variação da população, em relação ao tempo, daqui a t anos.
 - (b) Qual será a taxa de crescimento da população daqui a 1 ano?
 - (c) Qual será o crescimento real da população durante o 2.º ano?
5. O imposto anual pago pelo aluguel de determinado *software* x anos após 2000 era de $I(x) = 20x^2 + 40x + 600$. Qual será a taxa de crescimento do imposto, em relação ao tempo, em 2006?
6. O produto nacional bruto (PNB) de determinado país, t anos após 2000, foi de $P(t) = t^2 + 5t + 200$ bilhões de dólares. Utilizando cálculo, faça uma estimativa da variação percentual do PNB durante o primeiro trimestre de 2004.
7. Calcula-se que, daqui a x meses, a população de uma certa comunidade será de $P(x) = x^2 + 20x + 8.000$ habitantes.
- (a) Qual será a taxa de variação da população desta comunidade daqui a 15 meses.
 - (b) Qual será a variação real da população durante o 16.º mês?

ANÁLISE MARGINAL

Em Economia a variação de uma quantidade em relação à outra pode ser descoberta por qualquer dos dois conceitos: o de **Média** ou o de **Marginal**. O conceito de média, expressa a variação de uma quantidade sobre um conjunto específico de valores de uma segunda quantidade, enquanto que o conceito de marginal, é a mudança instantânea na primeira quantidade que resulta de uma mudança em unidades muito pequenas na segunda quantidade.

Suponha que $C(q)$ seja o custo total de produção de q unidades de um certo produto. A função C é chamada de **função custo total** (como já vimos anteriormente). Em circunstâncias normais q e $C(q)$ são positivas. Note que, como q representa o número de unidades de um produto, q tem que ser inteiro não negativo, de modo que tenhamos as condições de continuidade para a função C .

O **custo médio** da produção de cada unidade do produto é obtido dividindo-se o custo total pelo número de unidades produzidas; isto é, $CM(q) = C(q)/q$, onde CM é chamada **função custo médio**.

Suponhamos que o número de unidades de uma determinada produção seja q_1 , e que ela tenha sido alterada por Δq . Então a variação no custo total é dada por $C(q_1 + \Delta q) - C(q_1)$, e a variação média no custo total em relação a variação no número de unidades produzidas é dada por:

$$\frac{C(q_1 + \Delta q) - C(q_1)}{\Delta q} \quad (1)$$

Os economistas usam o termo **Custo Marginal** para limite do quociente (1) quando Δq tende a zero, desde que o limite exista. Esse limite é a derivada de C em q_1 ; portanto a definição de custo marginal será:

Se $C(x)$ é o custo de produção de x unidades de um certo produto, então o **Custo Marginal**, quando $x = x_1$, é dada por $C'(x_1)$, caso exista. A função C' é chamada **Função Custo Marginal** e freqüentemente é uma boa aproximação do custo de produção de uma unidade adicional.

Na definição acima, $C'(x_1)$ pode ser interpretada como a taxa de variação do custo total quando x_1 unidades são produzidas.

FÓRMULA DE APROXIMAÇÃO:

A derivada da função é uma boa aproximação provocada por um aumento **unitário** na variável.

ANÁLISE MARGINAL

Em Economia, a taxa de variação instantânea é uma aproximação para o aumento **unitário** da variável. Este aumento é denominado **MARGINAL**.

$$C_{MG} = C'(x), \quad R_{MG} = R'(x), \quad L_{MG} = L'(x)$$

Aplicações

Suponha que o custo total p/ se fabricar x unidades de um certo produto seja $C(x) = 3x^2 + 5x + 10$.

- (a) Encontre o custo marginal
- (b) Determine usando análise marginal, o custo de produção para a 51.ª unidade.
- (c) Determine o custo real de produção da 51.ª unidade.

Solução:

(a) O custo marginal é a derivada primeira do custo: $C'(x) = 6x + 5$

(b) O custo de produção da 51.ª unidade é igual $C'(50)$, portanto: $C'(50) = 6 \cdot (50) + 5 = 305$

(c) O custo real de produção da 51.ª unidade é igual $C(51) - C(50)$

$$\text{Temos então: } C(51) = 3 \cdot (51)^2 + 5 \cdot (51) + 10 = 8068$$

$$C(50) = 3 \cdot (50)^2 + 5 \cdot (50) + 10 = 7760$$

$$C(51) - C(50) = 8068 - 7760 = 308$$

Exemplo:

Suponha que o custo total ao se fabricar x unidades de brinquedos seja de

$$C(x) = 3x^2 + 5x + 10.$$

a) Deduza a fórmula do custo marginal.

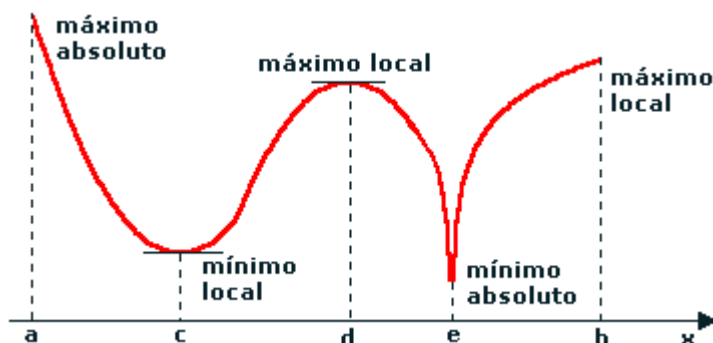
Resp.: $C'(X) = 6X + 5$

da montagem, ou seja, $R(t) = Q'(t)$ que é a função que tem que ser derivada para análise no intervalo $0 \leq t \leq 4$).

4. Calcula-se que a produção semanal de certa fábrica seja de $P(x) = -x^3 + 60x^2 + 1200x$ unidades, onde x representa o número de operários da fábrica. Atualmente, há 30 operários trabalhando. Usando cálculo, avalie a variação que ocorrerá na produção semanal da fábrica caso se acrescente **um operário à força de trabalho existente**.
5. Estima-se que a produção semanal de uma fábrica seja de $Q(x) = -x^3 + 60x^2 + 1200x$ unidades, onde x é o número de empregados desta fábrica. Atualmente, 30 operários trabalham na fábrica. Use a análise marginal para estimar a variação semanal da produção resultante do emprego de mais um operário.
6. Considere a função custo $C(x) = \frac{x^3}{1000} - 3x$.
 - d. Calcule o custo de produzir uma unidade a mais, ao nível de produção $x = 200$. (ou seja, o custo da 201ª unidade)
 - e. Calcule o custo marginal ao nível de produção $x = 200$.
7. Suponha que o custo total para se fabricar x unidades de um certo produto seja $C(x) = 3x^2 + 5x + 10$.
 - a) Deduza a fórmula do custo marginal.
 - b) Calcule o custo de produção da 51.ª unidade, empregando a aproximação fornecida pelo custo marginal.
 - c) Calcule o custo real de produção da 51.ª unidade.
8. Suponha que o custo total para se fabricar x unidade de um certo produto seja $C(x) = 3x^2 + 5x + 10$.
 - a. Deduza a fórmula do custo marginal.
 - b. Calcule o custo de produção da 51.ª unidade, empregando a aproximação fornecida pelo custo marginal
 - c. Calcule o custo real de produção da 51.ª unidade.
9. Dada a função demanda : $x = 50 - 2p - \frac{3}{2}p^2$, calcule para $p = 4$:
 - a. A Receita Total
 - b. A Receita Marginal
10. Sendo $x = 400 - 0,4p$ a função de demanda de um bem, onde x é a quantidade demandada e p é o preço, determinar:
 - A função receita total
 - A função Receita Marginal
 - A receita marginal para 100 unidades
11. O Custo total de fabricação de um certo produto é de $C(x) = 0,1x^3 - 0,5x^2 + 500x + 200$ reais, onde x é a número de unidades produzidas.
 - a. Use análise marginal para estimar o custo de fabricação da 4.ª unidade.

b. Calcule o custo real de fabricação da 4.ª unidade .

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO(MÁXIMO OU MÍNIMO)



Para encontrar o ponto extremo da função (máximo ou mínimo absoluto), que é o ponto que anula a derivada primeira de uma função, devemos:

- derivar a função;
- igualar a derivada primeira a zero; resolver a equação e encontrar o(s) valor(es) de x que maximizam ou minimizam a função
- fazer o teste da derivada de 2.ª ordem para os valores encontrados para x :

Se $f''(x_0) > 0 \rightarrow x_0$ é abscissa de um mínimo local.
 $f''(x_0) < 0 \rightarrow x_0$ é abscissa de um máximo local

Aplicações

- Dada a função receita $R(x) = -2x^2 + 10x$, obtenha o valor de x que maximiza a receita.
- Dada a função de demanda $p = 40 - 2x$, obtenha o preço que deve ser cobrado para maximizar a receita.
- Com relação ao exercícios anterior, qual o preço que deve ser cobrado para maximizar o lucro, se a função custo for $C(x) = 40 + 2x$?
- A função custo mensal de fabricação de um produto é $C(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 10x + 10$, e o preço de venda é $p = 13$. Qual a quantidade que deve ser produzida e vendida mensalmente para dar máximo lucro?

5. A função custo mensal de fabricação de um produto é $C(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 10x + 1$ e a função de demanda mensal do mesmo produto é $p = 10 - x$. Qual é o preço que deve ser cobrado para maximizar o lucro?
6. Um determinado produto apresenta como função custo a curva $C(x) = 50 + 40x + 5x^2$, pede-se:
- A equação do custo marginal.
 - O custo marginal, quando a quantidade produzida é igual a 3?
 - A equação do custo Médio (Custo total dividido pela quantidade x)
 - O Custo médio, quando a quantidade produzida for igual a 4.
 - Qual é a quantidade a produzir, a fim de que o custo médio seja mínimo?
7. Seja a função Custo Total = $C(x) = x^2 + 2x + 100$, pede-se:
- A Equação do Custo Marginal
 - A Equação do Custo Médio
 - A Quantidade para que o Custo Médio seja mínimo
 - O Custo Médio Mínimo
 - O custo marginal para a quantidade de custo médio mínimo.
8. A equação de demanda de um monopolista é $p = 400 - 2x$, sendo a função custo $C(x) = 120 + 60x - x^2$, determine a quantidade que maximiza o lucro e determine o lucro máximo.
9. Em uma fábrica de pneus, o preço de um certo tipo de pneu é dado por $p = -0,4x + 400$ ($0 \leq x \leq 1000$)
- Obtenha a função receita total
 - Obtenha a quantidade que maximiza a receita.
 - Determine a receita máxima para a quantidade acima.
10. Um monopolista tem um custo médio mensal de $C_{ME}(x) = x^2 - 10x + 60$, em que x é a quantidade produzida. A função de demanda desse produto é $p = 50 - 3x$. Que preço deve ser cobrado para maximizar o lucro mensal?
11. Por várias semanas, o Serviço de Trânsito vem pesquisando a velocidade do tráfego numa auto-estrada. Verificou-se que num dia normal de semana, à tarde, entre 1 e 6 horas, a velocidade do tráfego é de aproximadamente $V(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 40$ Km/h transcorridas após o meio-dia. A que horas, dentro do intervalo de tempo mencionado, o tráfego se move mais rapidamente e a que horas se move mais lentamente?
12. O preço de custo da pizza de atum é de R\$5,00 cada. Um a pizzaria calcula que, se vender cada pizza por x reais, os consumidores comprarão $20 - x$ pizza por dia. Qual é o preço de venda da pizza que maximiza o lucro da pizzaria?

13. A receita total na venda de x unidades de um bem é dada por: $R(x) = 200x - \frac{1}{3}x^2$. Ache:
- A equação da demanda
 - A quantidade que maximiza a receita
 - A receita máxima
 - O preço para a quantidade que maximiza a receita.
14. A equação de demanda de um certo produto é dada por: $p = 6 - \frac{1}{2}x$, determine:
- A função receita total,
 - A quantidade (nível de produção) que resulta na receita máxima.
 - O preço cobrado quando para a receita máxima.
15. Suponha que a equação de demanda de um monopolista seja dada por $p = 100 - 0,01x$ e que o custo seja constituído de uma taxa fixa de R\$ 10.000,00, mais R\$ 50,00 por unidade produzida. Encontre a quantidade que maximiza o lucro para este nível de produção.

ELASTICIDADE DE DEMANDA

Em geral, a demanda de um produto está associada a seu preço, na maioria dos casos, a demanda diminui à medida que seu preço aumenta.

A variação percentual verificada na demanda, provocada por um aumento de 1% no preço constitui uma boa medida da sensibilidade da demanda em relação ao preço.

Representando o preço por p , a quantidade por x e uma pequena variação do preço por Δp , obtemos a fórmula de aproximação para variação percentuais:

Em particular, se a variação for de 1%, isto é: $\Delta p = 0,01p$, substituindo na fórmula temos a **Elasticidade de Demanda**:

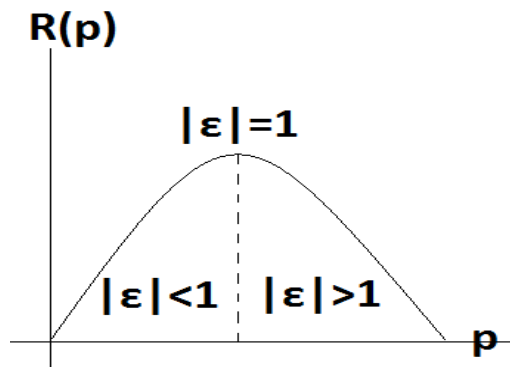
$$\varepsilon = 100 \times \frac{f'(p) \times \Delta p}{f(p)} = 100 \times \frac{f'(p) \times 0,01p}{f(p)} = \frac{p \times f'(p)}{f(p)}$$

Daí **Elasticidade de Demanda** $\varepsilon = \frac{p \times f'(p)}{f(p)}$

NÍVEIS DA ELASTICIDADE

Em geral ε é **negativa**, pois diminui a medida que o preço aumenta, observe a análise a seguir:

Se $|\varepsilon| > 1 \Rightarrow$ A demanda é **Elástica** em relação ao preço
 Se $|\varepsilon| < 1 \Rightarrow$ A demanda é **Inelástica** em relação ao preço
 Se $|\varepsilon| = 1 \Rightarrow$ A demanda tem elasticidade unitária em relação ao preço.



APLICAÇÃO ELASTICIDADE

Suponha que a demanda x e o preço p de um determinado produto encontrem-se relacionados pela equação: $p = 60 - 2x$ ($0 \leq p \leq 30$)

- (a) Exprima a elasticidade da demanda em função de p .
- (b) Calcule a elasticidade da demanda quando $p = 10$. Interprete sua resposta.

Solução:

(a) Temos a função Elasticidade = $\varepsilon = p \times \frac{f'(p)}{f(p)}$,

Como $p = 60 - 2x$, devemos colocar x em função de p para obter $f(p)$ e $f'(p)$

$$2x = 60 - p \rightarrow x = \frac{60 - p}{2} \Rightarrow f(p) = \frac{60 - p}{2} \text{ e } f'(p) = -\frac{1}{2}$$

$$\varepsilon = p \times \frac{f'(p)}{f(p)} \rightarrow \varepsilon = p \times \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{60 - p}{2}} = -\frac{p}{60 - p}$$

(b) Para $p = 10$ temos: $\varepsilon(10) = -\frac{10}{60 - 10} = -\frac{10}{50} = -0,2\%$

Interpretação: Um aumento de preço equivalente a 1% gera uma queda na demanda de 0,2%, isto significa dizer que este aumento não afeta a demanda (inelástica).

ELASTICIDADE e RECEITA

Suponha que a equação da demanda de determinado produto seja $x = 500 - 2p$, com $0 \leq p \leq 250$.

- (a) Determine onde a demanda é elástica, inelástica e de elasticidade unitária em relação ao preço.

- (b) Utilize o resultado obtido no item (a) para determinar os intervalos em que a função receita é crescente, decrescente e o preço para o qual a receita é máxima.
- (c) Determine explicitamente a função receita total e utilize sua derivada para calcular os intervalos onde a função é crescente, decrescente. Determine também, o preço para o qual a receita é máxima.
- (d) Represente graficamente os trechos mais significativos da função demanda e receita

Solução:

(a) Para isso devemos achar $\varepsilon = p \times \frac{f'(p)}{f(p)}$,

Como já temos x em função de p , isto é $x = f(p) = 500 - 2p \rightarrow f'(p) = -2$, substituindo em ε

$$\varepsilon = p \times \frac{-2}{500 - 2p} = \frac{-2p}{500 - 2p},$$

$$\varepsilon = 1 \rightarrow \frac{-2p}{500 - 2p} = -1 \rightarrow -2p = -500 + 2p \rightarrow 4p = 500 \rightarrow p = 125 \text{ (demanda unitária)}$$

$$\varepsilon < 1 \rightarrow 0 < p < 125 \text{ (demanda inelástica)}$$

$$\varepsilon > 1 \rightarrow 125 < p < 250 \text{ (demanda elástica)}$$

(b) Crescente $0 < p < 125$ (onde $f'(p) > 0$) e Decrescente $125 < p < 250$ (onde $f'(p) < 0$)

Ponto de Máximo onde $f'(p) = 0$, isto é para $p = -2$ teremos $R(p) = 125$ Máxima

(c) $R(p) = x \cdot p = (500 - 2p) \cdot p = 500p - 2p^2 \rightarrow R'(p) = 500 - 4p$, fazendo $R'(p) = 0$ temos o ponto de Máximo: $500 - 4p = 0 \therefore 4p = 500 \Rightarrow p = 125$

EXERCÍCIOS PARA SALA

- A quantidade x e o preço p de certo produto estão relacionados pela seguinte equação de demanda $x = 600 - 3p$.
 - Determine a elasticidade de demanda em função do preço.
 - Calcular a elasticidade de demanda de um produto A para $p = R\$ 150,00$ (interprete o resultado)
 - Calcular a elasticidade de demanda de um produto B para $p = R\$ 50,00$ (interprete o resultado)
- A quantidade x e o preço p de certo produto estão relacionados pela seguinte equação de demanda $x = 1000 - 4p$.
 - Determine a elasticidade de demanda em função do preço
 - Calcular a elasticidade de demanda para $p = R\$ 200,00$
 - Calcular a elasticidade de demanda para $p = R\$ 100,00$
- A equação de demanda para certo produto é $x = 18 - 2p^2$, onde x unidades são demandadas quando o preço p é o preço unitário.
 - Ache o decréscimo relativo na demanda quando o preço de uma unidade é aumentado de \$ 2 para \$ 2,06
 - Use o resultado da parte (a) para obter uma aproximação da elasticidade-preço da demanda em $p = 2$

- c) Interprete o resultado obtido.
4. Admita que a demanda x e o preço p de um certo produto estejam relacionados pela equação linear: $x = 240 - 2p$, $0 \leq p \leq 120$.
- (a) Exprima a elasticidade da demanda em função de p .
(b) Calcule a elasticidade da demanda quando $p = 100$. Interprete sua resposta.
(c) Calcule a elasticidade da demanda quando $p = 50$. Interprete o resultado.
(d) Para que preço a elasticidade da demanda é igual a -1 ? em termos de Economia, qual o significado deste preço?
5. Suponha que a equação da demanda de um determinado produto seja $x = 60 - 0,1p$, $0 \leq p \leq 10$.
- (a) Exprima a elasticidade de demanda em função de p .
(b) Calcule a elasticidade de demanda quando o preço $p = 200$. Interprete o resultado obtido.
(c) Em que preço a elasticidade da demanda é igual a -1 ? O que significa este resultado?

TRABALHO - DERIVADAS – para o dia da prova

*Quem quer fazer alguma coisa encontra um meio,
Quem não quer fazer nada, encontra uma desculpa
Pensamento Árabe.*

DERIVADAS – APLICAÇÕES

1. Uma empresa estima que $1000x$ são gastos em propaganda, ela irá vender y unidades de um produto, onde $y = 5 + 400x - 2x^2$.
- a) Ache a taxa de variação média de y em relação a x quando a verba de propaganda é aumentada de \$10.000 para \$11.000.
b) Ache a taxa de variação instantânea (ou marginal) de y em relação a x quando a verba de propaganda é de \$10.000
2. Suponha que $H(x)$ unidades de um produto sejam produzidas diariamente quando x máquinas são usadas, e $H(x) = 2000x + 40x^2 - x^3$. Aplique derivada para estimar a variação na produção diária, se o número de máquinas usadas for aumentado de 20 para 21.
3. A equação de demanda para um certo tipo de bijuteria é $x = 100 - 3p - 2p^2$ onde x unidades são demandadas quando p é o preço por unidade.
- a) Ache a taxa de variação média da demanda em relação ao preço quando este é aumentado de \$4 para \$4,50.
b) Ache a taxa de variação instantânea da demanda em relação ao preço quando é \$4.
4. A equação de demanda para um certo tipo de detergente é $x = 1000(50 - 5p - p^2)$ onde x caixas são demandadas quando p é o preço por caixa.
- a) Ache a taxa de variação média da demanda em relação ao preço quando este é aumentado de \$2 para \$2,20.

b) Ache a taxa de variação instantânea da demanda em relação ao preço quando o preço é \$2.

5. A equação de oferta para um certo tipo de lâmpada é $x = 1000(4 + 3p + p^2)$ onde x lâmpadas são ofertadas quando p é o preço por lâmpada.

a) Ache a taxa de variação média da oferta em relação ao preço quando este é aumentado de \$0,90 para \$0,93.

b) Ache a taxa de variação instantânea da oferta em relação ao preço quando este é \$0,90.

6. Estima-se que um operário num estabelecimento que faz molduras de quadros possa pintar y molduras x horas depois do início do trabalho às 8 horas da manhã, e $y = 3x + 8x^2 - x^3$

a) Ache a taxa segundo a qual o operário está pintando às 10 horas da manhã

b) Ache o número de molduras prontas entre 10 e 11 horas da manhã.

7. Suponha que uma pessoa possa aprender $f(t)$ palavras sem sentido em t horas e que $f(t) = 15 \cdot t^{2/3}$. Ache a taxa de aprendizado da pessoa após 8 horas.

8. Uma frente fria aproxima-se do campus universitário. A temperatura é z graus t horas após a meia-noite e $z = 0,1 \cdot (400 - 40t + t^2)$

a) Ache a taxa de variação média de z em relação a t entre 5 e 6 horas da manhã.

b) Ache a taxa de variação instantânea de z em relação a t às 5 horas da manhã.

9. Espera-se que a população de uma certa cidade t anos após 1.º de Janeiro de 2004 seja $f(t)$, onde

$$f(t) = 10000 - \frac{4000}{t+1}$$

a) Use derivada para estimar a mudança esperada na população de 1.º de Janeiro de 2008 a 1º de Janeiro de 2009.

b) Ache a mudança exata esperada na população de 1.º de Janeiro de 2004 a 1º de Janeiro de 2009.

10. Suponha que sob monopólio a equação de demanda para um certo produto seja:

$p = 4 - 0,0002x$ onde x unidades são produzidas a cada dia e p é o preço unitário. O custo total da produção de x unidades é de $C(x) = 600 + 3x$. Se o lucro diário deve ser o maior possível, ache o número de unidades que o monopolista deve produzir a cada dia, o preço e o lucro diários.

11. Uma indústria de jogos eletrônicos operando sob concorrência perfeita fabrica e vende jogos para computadores. A empresa pode vender a um preço de \$75,00 cada, todos os jogos que produz. Se x jogos forem fabricados por mês e $C(x)$ for o custo total mensal de produção, então $C(x) = x^2 + 25x + 100$. Quantos jogos deveram ser produzidos e vendidos para que a empresa tenha um lucro total mensal máximo? Qual é o lucro mensal máximo da empresa?

12. Um monopolista determina que se $C(x)$ é o custo total da produção de x unidades de um certo produto, então $C(x) = 20000 + 25x$. A equação de demanda é dada por $p = 100 - 0,02x$, onde x unidades são demandadas quando p é o preço unitário. Se o lucro total deve ser maximizado, ache

a) O número de unidades que deveriam ser produzidas;

b) O preço de cada unidade;

c) O lucro máximo.

13. Uma empresa monopolista, determina que a equação de demanda de seu produto é dada por: $x + 2500p = 20000$, onde x unidades são demandadas quando o preço unitário é p . O custo de

produção é dado por uma taxa fixa de \$300,00 mais \$4,00 por unidade. Se o lucro total deve ser o maior possível, ache:

- a) O número de unidades que devem ser produzidas;
- b) O preço de cada unidade;
- c) O lucro máximo que pode ser obtido.

14. Sob monopólio, a equação de demanda para certo produto é $p = 190 - 0,03x$, onde x unidades são demandadas quando o preço unitário é p . Se para a produção de x unidades temos um custo fixo de \$ 50000 e um custo variável de \$40,00 por unidade, determine:

- a) O número de unidades que devem ser produzidas para se ter o lucro máximo;
- b) O preço unitário para se ter o lucro máximo;
- c) O lucro Máximo.

15. Sob monopólio, a equação de demanda para um certo artigo é $2x + 5p = 100$, onde x unidades são produzidas a um preço unitário de p . O custo total de produção de x unidades é

$C(x) = \frac{3}{20}x^2 + \frac{1}{100}x^3$. Ache o preço unitário e a quantidade para que o lucro total seja maximizado.

16. Uma certa indústria de equipamentos eletrônicos estima que o custo total (em reais) envolvido na fabricação de x peças de um certo aparelho no primeiro ano de produção será de $C(x) = 200x + 300000$ e a equação de demanda para esse aparelho é dada por $p = -0,04x + 800$.

- a) Encontre a função Receita;
- b) Determine a Receita Marginal;
- c) Calcule usando o conceito de função marginal a receita aproximada da venda da 5001ª unidade desse aparelho;
- d) Determine a função lucro;
- e) Determine a função lucro marginal;
- f) Calcule o lucro marginal para $x = 5000$ e interprete o resultado obtido.

17. A demanda semanal por um certo modelo de TV-digital é igual a $p = 600 - 0,05x$ onde p denota o preço unitário por atacado em reais e x denota a quantidade demandada. A função custo total semanal associada com a produção é dada por

$C(x) = 0,000002x^3 - 0,03x^2 + 400x + 80000$ onde $C(x)$ denota o custo total envolvido na produção de x unidades.

- a) Determine as funções Receita e Lucro;
- b) Encontre as funções: Custo Marginal, Receita Marginal e Lucro Marginal;
- c) Calcule e interprete o resultado $C'(2000)$, $R'(2000)$ e $L'(2000)$

18. A demanda semanal por um certo modelo de TV-digital é igual a $p = -0,006x + 180$ onde p denota o preço unitário por atacado em reais e x denota a quantidade demandada. A função custo total semanal associada com a produção é dada por

$C(x) = 0,000002x^3 - 0,02x^2 + 120x + 60000$ onde $C(x)$ denota o custo total envolvido na produção de x unidades.

- a) Determine as funções Receita e Lucro;
- b) Encontre as funções: Custo Marginal, Receita Marginal e Lucro Marginal;
- c) Calcule e interprete o resultado $C'(2000)$, $R'(2000)$ e $L'(2000)$.

19. Uma imobiliária responsável pelo aluguel de apartamentos num prédio no litoral possui 100 unidades para ser alugadas. O lucro (em reais) obtido pelo aluguel de x unidades é $L(x) = -10x^2 + 1760x - 50000$.

- Qual é o lucro real obtido no aluguel da 51ª unidades?
- Calcule o lucro marginal quando $x = 50$ e compara com o resultado do item (a).

20. A quantidade demandada mensal de um certo equipamento eletrônico será relacionada com o preço unitário com a equação $p = \frac{50}{0,01x^2 + 1}$, onde p é preço em reais e x em milhares.

- Determine a função receita ;
- Determine a função receita marginal;
- Determine a receita real para a venda de 3 unidades;
- calcule $R'(2)$ e interprete o resultado.

21. Considere a equação de demanda $p = -0,02x + 400$, que descreve a relação entre o preço unitário em reais e a quantidade demandada x do um determinado produto.

- Determine função Elasticidade da demanda $E(p)$.
- Calcule $E(100)$ e interprete o resultado.
- Calcule $E(300)$ e interprete o resultado.

22. Se a equação de demanda de um certo bem de consumo é dada por:

$p = 4 - 0,0002x$, onde x unidades são produzidas a cada dia e p é o preço unitário, determine:

- A função Elasticidade-demanda-preço;
- A elasticidade de demanda quando $p = \$4,00$, interprete o resultado obtido.
- A elasticidade de demanda quando $p = \$3,50$, interprete o resultado obtido.
- A elasticidade de demanda quando $p = \$3,00$, interprete o resultado obtido.

]

23. A equação de demanda para certo produto é $x = 18 - 2p^2$ onde x unidades são demandadas quando p é o preço unitário.

- Ache a função Elasticidade-demanda-preço;
- Calcule a elasticidade quando $p = 2$ e interprete o resultado obtido.
- Calcule a elasticidade quando $p = 1,5$ e interprete o resultado obtido.
- Calcule usando a elasticidade de demanda o preço máximo que pode ser cobrado pelo produto.

24. A equação de demanda para certo produto é dada por $x = 2100 - 100p^2 - 400p$. Se o preço por unidade é aumentado de \$2 para \$2,20, ache o decréscimo relativo na demanda.

INTEGRAL INDEFINIDA

Termos, Símbolos e Fórmulas Importantes:

Primitiva; anti-derivada ou integral indefinida:

1. INTEGRAL INDEFINIDA:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{ onde } f(x) \text{ é a primitiva de } F(x) \text{ e } C \text{ é uma constante qualquer.}$$

A função $f = f(x)$ é denominada função integrando;

O \int símbolo é chamado de integral;

A função $F = F(x)$ é chamada primitiva ou integral indefinida ou antiderivada;

O símbolo dx indica a variável que está sendo considerada para obtermos $F'(x) = f(x)$.

Regras de Integração

1. Regra da Potência: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, para $n \neq -1$.

2. A integral de $\frac{1}{x}$: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, onde $\ln = \log_e x$ (log Neperiano)

3. Regra da constante multiplicada: $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$

4. Regra da Soma: $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

5. Integral de e^x : $\int e^x dx = e^x + C$

6. Integral por substituição:

$$\int g'(u) \frac{du}{dx} = g(u) + C, \text{ onde: } g(u) \text{ é a primitiva de } g'(u)$$

Exemplos resolvidos:

1. Calcule as integrais indicadas:

(a) $\int \left(x^5 - 3x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$

Resolução:

Aplicando a regra 2 temos: $\int x^5 dx - \int 3x^2 dx + \int x^{-2} dx$, agora devemos aplicar a regra 1

(da potência) em cada fator:

$$\frac{x^6}{6} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^6}{6} - x^3 - \frac{1}{x} + c$$

(b) $\int \left(3e^x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx$

Resolução:

$$\begin{aligned} &= \int 3e^x dx + \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{1}{2}x^2 dx = 3 \int e^x dx + 2 \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int x^2 dx = \\ &= 3e^x + 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{6}x^3 + c \end{aligned}$$

2. Calcule as integrais indicadas usando o método da substituição:

(a) $\int 9 \cdot (x^2 + 3x + 5)^8 \cdot (2x + 3) dx$

Resolução:

Substituindo $x^2 + 3x + 5 = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x + 3}$, Voltando na função,

$$\int 9 \cdot u^8 \cdot (2x + 3) \cdot \frac{du}{(2x + 3)} = \int 9 \cdot u^8 du = 9 \cdot \frac{u^9}{9} + c = u^9 + c = (x^2 + 3x + 5)^9 + c$$

(b) $\int \frac{3x}{x^2 - 1} dx$

Resolução:

Usando o método de substituição , chamando $x^2 - 1 = u$, calculando $\frac{du}{dx} = 2x$, isolando dx ,

temos: $dx = \frac{du}{2x}$ (Mas, observe que se substituirmos na função original, não haverá uma simplificação, para simplificarmos vamos multiplicar os dois lados por 3, temos então:

$3 \cdot dx = 3 \cdot \frac{du}{2x}$, Substituindo agora na função integranda,:

$$\int \frac{x}{u} \cdot 3 \cdot \frac{du}{2x} = \int \frac{3}{2} \left(\frac{1}{u} \right) du = \frac{3}{2} \cdot \ln|u| + c, \text{ voltando com o } u \text{ temos então finalmente a função}$$

primitiva: $f(x) = \frac{3}{2} \ln|x^2 - 1| + c.$

Exercícios sala de Aula:

Encontre o resultado das Integrais Indefinidas a seguir:

(a) $\int x^{3/5} dx =$	(h) $\int \left(\frac{3x^5 + 2x - 5}{x^3}\right) dx =$	(o) $\int (4e^x - x) dx =$
(b) $\int 1 dx =$	(i) $\int x^3 \cdot \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx =$	(p) $\int \frac{10}{x+7} dx =$
(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$	(j) $\int (x^{1/2} - 3x^{2/3} + 6) dx =$	(q) $\int \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x+2}\right) dx =$
(d) $\int x^5 dx =$	(k) $\int x \cdot (2x+1)^2 dx =$	(r) $\int (x+3) \cdot (x-4) dx =$
(e) $\int \frac{1}{x^2} dx =$	(l) $\int 3e^x dx =$	(s) $\int \left(\frac{5}{x+\sqrt{3}}\right) dx$
(f) $\int (x^2 + 2x^3 + 1) dx =$	(m) $\int \left(\frac{1}{3x} - \frac{3}{3x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx =$	(t) $\int \left(\frac{6}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx =$
(g) $\int \frac{x^3 + x^2}{2x} dx =$	(n) $\int \left(\frac{4}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}\right) dx =$	(u) $\int 4 \cdot \sqrt[3]{x} dx =$

GABARITO

(a) $F(x) = \frac{5}{8} \cdot x^{8/5} + c$	(i) $F(x) = \frac{2}{5} x^5 + \frac{x^3}{3} + c$	(q) $F(x) = \frac{x^2}{2} - 3 \ln(x+2) + c$
(b) $F(x) = x + c$	(j) $F(x) = \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{9x^{5/3}}{5} + 6x + c$	(r) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 12x + c$
(c) $F(x) = 2\sqrt{x} + c$	(k) $F(x) = x^4 + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$	(s) $F(x) = 5 \cdot \ln(x+\sqrt{3}) + c$
(d) $F(x) = \frac{1}{6} x^6 + c$	(l) $F(x) = 3e^x + c$	(t) $F(x) = 6 \cdot \ln x - \frac{2}{x} + c$
(e) $F(x) = -\frac{1}{x} + c$	(m) $F(x) = \frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{x} + \frac{x^{3/2}}{3} + c$	(u) $F(x) = 3x^{4/3} + c$
(f) $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + x + c$	(n) $F(x) = -\frac{4}{x} + 3\sqrt{x} + c$	
(g) $F(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + c$	(o) $F(x) = 4e^x - \frac{x^2}{2} + c$	
(h) $F(x) = x^3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{2x^2} + c$	(p) $F(x) = 10 \ln(x+7) + c$	

INTEGRAL DEFINIDA

2. INTEGRAL DEFINIDA:

A integral definida de $f(x)$ de a até b é a **diferença**

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, onde F é a primitiva de $f(x)$. Quer dizer: a integral definida é a variação líquida da primitiva, entre $x = a$ e $x = b$

Exercícios para Sala de Aula

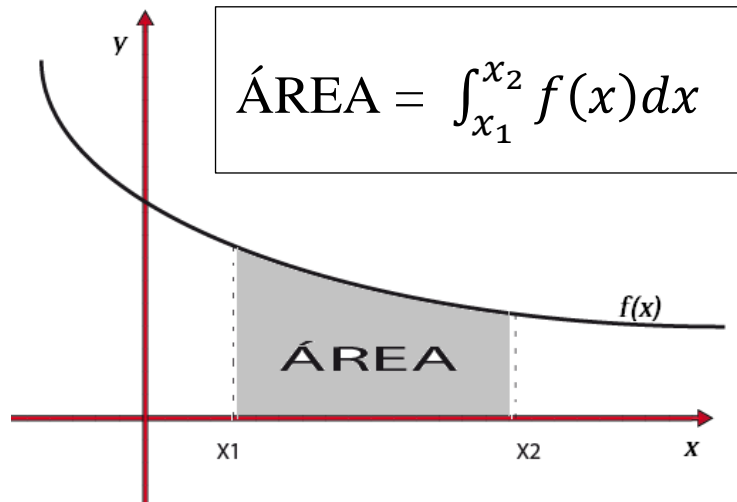
(a) $\int_0^1 (5x^4 - 8x^3 + 1)dx =$	(f) $\int_{-1}^1 \left(\frac{2}{x^2} + 2x \right) dx =$	(k) $\int_1^2 (4x^3 + 3x^{-4} - 5)dx =$
(b) $\int_1^4 (\sqrt{x} + x^{-\frac{3}{2}})dx =$	(g) $\int_1^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx =$	(l) $\int_0^3 (x^3 + x - 7)dx =$
(c) $\int_{-1}^2 30(5x - 2)^2 dx =$	(h) $\int_0^2 (e^{3x}) dx =$	(m) $\int_0^1 (2x + 4)dx =$
(d) $\int_0^4 (x^2 - 3x + 1)dx$	(i) $\int_1^3 \frac{x^2 + x + 1}{x} dx$	(n) $\int_{-1}^1 (x^2 - x + 1)dx =$
(e) $\int_{-1}^1 (4 + 2e^x)dx =$	(j) $\int_2^4 \left(x^2 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x+5} \right) dx =$	

Gabarito

(a) { 0 }	(f) { -4 }	(k) 8,875
(b) {17/3}	(g) $\left\{ \frac{8}{3} + \ln 3 \right\} = 3,765$	(l) {15/4}
(c) {1.710}	(h) $\left\{ \frac{1}{3} \cdot e^6 - \frac{1}{3} \right\} = 134,143$	(m) {5}
(d) {4/3}	(i) {7,099}	(n) { 2,667 }
(e) $\{ 2 + 2e \} = 7,4365$	(j) $\left\{ \frac{115}{6} + \ln \frac{7}{9} \right\} = 18,915..$	

3. ÁREA DE UMA REGIÃO EM UM PLANO:

Considere a função $f(x)$ representada no gráfico a seguir, a área de região destacada, limitada pelas retas verticais $x = x_1$, $x = x_2$, pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x)$ pode ser calculada através de uma integral, definida de x_1 até x_2 , isto é:



Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ então o número de unidades quadradas na área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$ é igual:

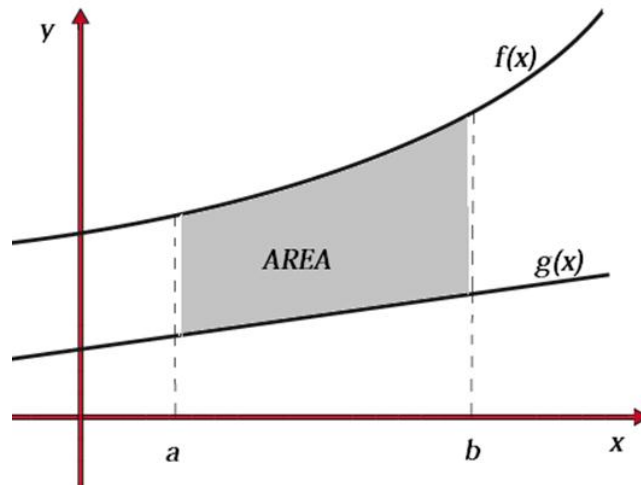
$$A(x) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Obs: Se $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$, definimos a área da região como:

$$A(x) = \int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

4. ÁREA ENTRE DUAS CURVAS

Se $f(x)$ e $g(x)$ forem contínuas no intervalo $[a, b]$, com $f(x) \geq g(x)$, e A a área da região limitada pelos gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ pelas verticais $x = a$ e $x = b$,



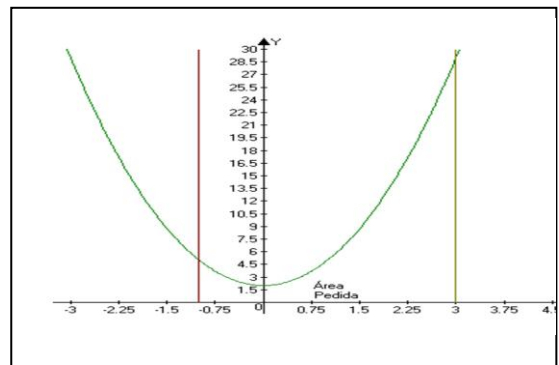
$$\text{Área} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Exemplos

a) Determine a área da região limitada pela curva $y = 3x^2 + 2$, as retas $x = -1$ e $x = 3$ e o eixo x.

Solução: Construir o gráfico das três funções no mesmo plano:

Calcular a integral definida para o intervalo $[-1,3]$

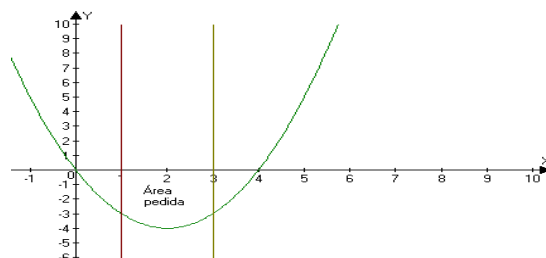


$$\int_{-1}^3 (3x^2 + 2) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2x = [(3)^3 + 2 \cdot 3] - [(-1)^3 + 2 \cdot (-1)] = 36$$

b) Calcular a área limitada pela curva $y = x^2 - 4x$, o eixo x, e as retas $x = 1$ e $x = 3$.

Solução: Construir os gráficos:

Integrar a função no intervalo $[1,3]$

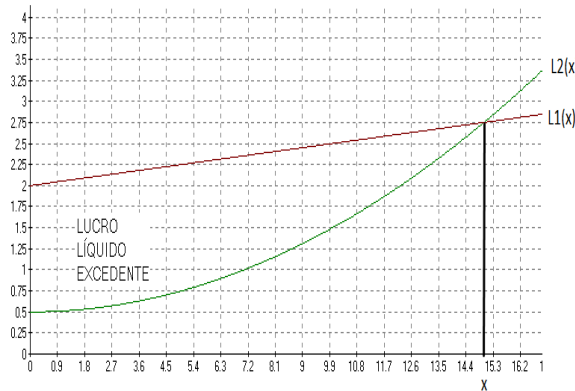


$$-\int_1^3 (x^2 - 4x)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right] = -\left[\left[\frac{3^3}{3} - 2(3)^2\right] - \left[\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2\right]\right] = -\left[-\frac{22}{3}\right] = \frac{22}{3}$$

APLICAÇÕES NA ECONOMIA:

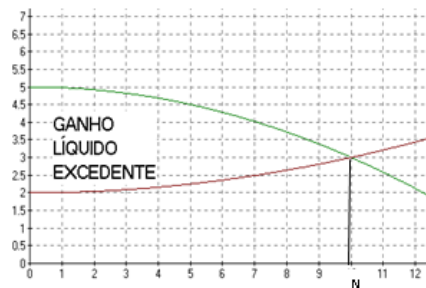
1. Lucro Líquido Excedente:

Suponhamos que, daqui a x anos, dois planos de investimentos estejam gerando lucros respectivamente segundo as taxas $L_1(x)$ e $L_2(x)$ reais por ano e que, ao longo de todos os N anos, a taxa $L_1(x)$ seja maior que $L_2(x)$, conforme figura:



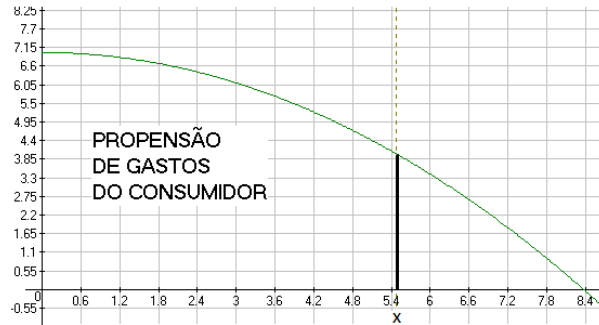
$$\text{Lucro Líquido} = \int_0^N [L_1(x) - L_2(x)]dx$$

2. Ganho líquido proporcionado por um equipamento industrial



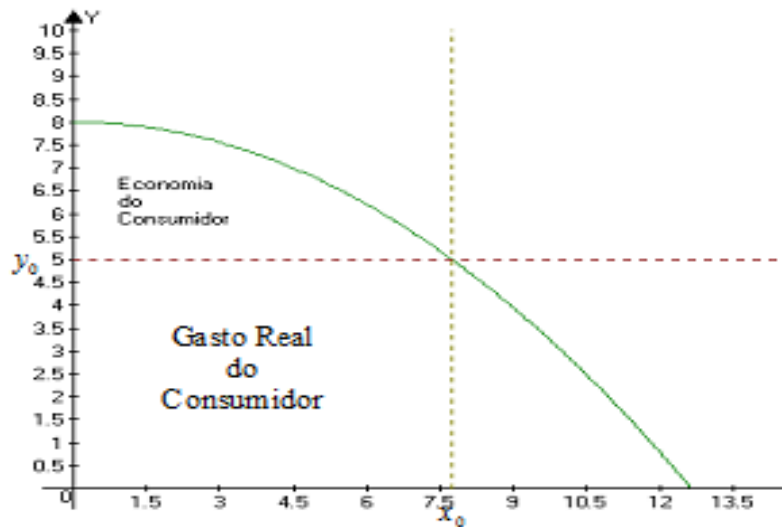
$$\text{Ganho Líq. Excedente} = \int_0^N [R_2(x) - R_1(x)]dx$$

3. Curva de Demanda e propensão de gastos do consumidor



$$\text{Propensão de Gastos do Consumidor} = \int_0^{x_0} D(x) dx$$

4. Economia do consumidor = E.C.



$$\text{E.C.} = \int_0^{x_0} [D(x) - x_0 \times y_0] dx$$

Exercícios aplicados

1. Suponha que a função demanda de determinado produto seja: $D(x) = \$4.(25 - x^2)$ por unidades.

a) Determine a economia do consumidor, se o preço unitário for \$ 64.

Resolução:

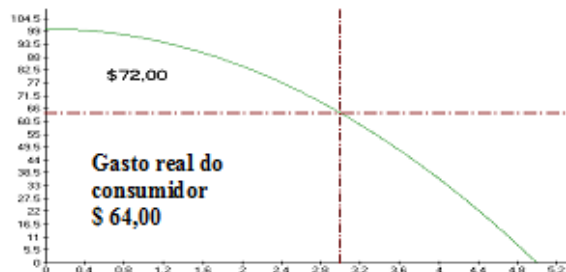
Como temos o preço unitário e a função demanda, devemos encontrar a quantidade demandada, para isso, fazemos: $64 = 4(25 - x^2)$, daqui achamos que $x = 3$, portanto a quantidade demanda para este preço é três.

Agora é só integrar a função demanda de 0 até 3.

$$\int_0^3 D(x)dx = \int_0^3 (4.(25 - x^2)dx) = 4.\left(25x - \frac{x^3}{3}\right) = 264 - 64.3 = \$72,00$$

(b) Trace a curva de demanda e interprete a economia do consumidor com uma área.

No gráfico temos:



- (a) Suponha que a função demanda de determinado produto seja $D(x) = 100 - 4x^2$ reais por unidade.
- a) Determine a quantidade total que os consumidores dispore-se-ão a pagar a fim de adquirir três unidade do produto.

Resolução:

Basta fazer a integral definida de 0 a 3 da função demanda!

$$\int_0^3 D(x)dx = \int_0^3 (100 - 4x^2)dx = (100x - 4.\frac{x^3}{3}) = 100.3 - 4.\frac{3^3}{3} = 300 - 36 = \$264,00$$

EXERCÍCIOS PARA SALA

1. A função receita marginal é dada por $R_{MG}(x) = 80 - x + x^2$. Determine:
 - a) A função receita total;
 - b) A função demanda.
2. Uma empresa sabe que o custo marginal de produção de x unidades é de $C_{mg} = 6x^2 - 2x + 200$ unidade. O custo para produzir as três primeiras unidades foi de R\$ 1.200,00. Calcular o custo para produzir as 10 primeiras unidades.
3. A função custo marginal de determinado produto é dada por $C_{MG}(x) = 20 + 40x - 6x^2$. O custo fixo é de \$ 60. Determine:
 - a) A função custo total;
 - b) A função custo médio;
 - c) A função custo variável. (Custo total – custo fixo)
4. Uma indústria sabe que o custo marginal de produção de x unidades é de R\$ $9x^2 - 4x + 300$ unidade. O custo para produzir as duas primeiras unidades foi de R\$ 800,00. Calcular o custo para produzir as 5 primeiras unidades.
5. Determinar a receita referente a venda de 10 unidade de um produto x , sabendo que a função receita marginal é dada por: $R_{mg}(x) = 0,6x^2 - 10x + 50$.
6. Encontre a área limitada pela curva $y = x^2 - 3x - 4$, pelo eixo x , e pelas retas $x = 2$ e $x = 6$.
7. Um fabricante calculou que o custo marginal da produção q unidades é de $6q + 1$ reais por unidade. O custo total da primeira unidade é de R\$ 130,00. Qual é o custo total de produção das 10 primeiras unidades?
8. O lucro marginal de uma fábrica ao produzir q unidades é de $100 - 2q$ reais por unidade. Se o lucro obtido com a produção de 10 unidades é de \$700,00. Qual será o lucro máximo da fábrica?
9. Em uma certa fábrica, quando o nível de produção mantém-se eu q unidades, o custo marginal de cada uma é de $3.(q - 4)^2$ reais. Qual será o aumento verificado no custo total de fabricação se a média de produção crescer, passando de 6 para 10 unidades?
10. Um estudo indica que daqui a x meses, a população de certa idade crescerá à taxa de $5 + 3x^{\frac{2}{3}}$ pessoas por mês. De quanto a população crescerá nos próximos 8 meses?
11. Estima-se que, daqui a t dias, a colheita de frutas de uma fazenda aumentará a uma taxa de $0,3t^2 + 0,6t + 1$ frutas por dia. De quanto aumentará o valor da colheita durante os próximos 5 dias, se o preço de mercado permanecer constante, a \$3,00 por fruta?
12. Depois de uma experiência, um certo fabricante determinou que se produzissem x unidades de um determinado produto por semana; o custo marginal seria dado por $0,3x - 11$ onde o custo de produção é em reais. Se o preço de venda do produto é fixado em R\$ 19,00 por unidade, e o custo fixo por semana é R\$ 100,00, encontre o lucro máximo que pode ser obtido.
13. Uma indústria fez uma análise de suas instalações de produção de pessoal. Com o atual equipamento e número de trabalhadores, a indústria pode produzir 3000 unidades por dia. Estima-se que sem qualquer mudança nas instalações a taxa de variação do número de unidades produzidas por dia em relação à variação do número de trabalhadores

- adicionais é $80 - 6\sqrt{x}$, onde x é o número de trabalhadores adicionais. Encontre a produção diária, caso se admitam mais 25 trabalhadores.
14. Se após t horas de trabalho, um operário de fábrica produz $Q_1(t) = 60 - 2(t - 1)^2$ unidade por hora, ao passo que um segundo operário produz $Q_2 = 50 - 5t$ unidades por hora.
- Se ambos chegaram ao trabalho às 8h, quantas unidades o primeiro operário terá produzido a mais que o segundo às 12h?
 - Interprete a resposta encontrada em (a) como a área compreendida entre duas curvas
15. Se, aos x anos de idade, uma máquina industrial gerar receita à razão de \$ $R(x) = 6025 - 10x^2$ /ano e seus custos se acumularem a razão de \$ $C(x) = 4000 + 15x^2$ /ano:
- Por quantos anos o uso da máquina é lucrativo?
 - Qual é o ganho líquido gerado pela máquina ao longo do período encontrado no item (a)
 - Interprete a resposta encontrada em (a) como a área compreendida entre duas curvas.
16. Aos x anos de uso, certa máquina gera receita a uma taxa de $R(x) = 4575 - 5x^2$ reais por ano, e acarreta custos que se acumulam a uma taxa de $C(x) = 1200 + 10x^2$ reais ano.
- Por quantos anos o uso da máquina é produtivo?
 - Qual é o ganho total líquido gerado pela máquina durante o período de tempo do item acima?
17. Uma fábrica de brinquedos fez um estudo de eficiência de seus trabalhadores e chegou a conclusão de que a taxa à qual um brinquedo é montado por um trabalhador médio, t horas após iniciar seu trabalho às 8 horas da manhã é de: $-\frac{3}{2}t^2 + 6t + 20$ para $(0 \leq t \leq 4)$ unidade/hora.
- determine o número total estimado de jogos que um trabalhador médio monta nas 4 horas do turno da manhã
 - Qual é o número total estimado de unidades que um trabalhador médio monta na primeira hora do turno da manhã? E na segunda hora?
18. Seja $p = -x^2 - 2x + 24$ a função demanda para determinado produto.
- Determine o excedente do consumidor para $p = 9$
 - Determine o excedente do consumidor para $p = 16$.
19. Sejam $p = -2x + 7$ e $p = \frac{x^2}{2} + 1$ as funções demanda e oferta para determinado produto.
- Esboce os gráficos das funções e determine o ponto de equilíbrio;
 - Determine o Excedente do Consumidor quando o preço é de equilíbrio;
 - Determine o Excedente do produtor para o mesmo preço.
20. Seja $x = \frac{30}{p} - 30$ a função demanda para certo produto.
- Determine o Excedente do Consumidor quando o preço é \$5;
 - Determine a função receita para esse produto

Matemática, de modo algum, são fórmulas, assim como Música não são notas”

Jurquim

TRABALHO – entrega no dia da prova.

APLICAÇÃO INTEGRAIS

- Suponha que para um período de 5 minutos, uma secretária possa datilografar a uma taxa de $f(x) = 75 + 10x - 3x^2$, $0 \leq x \leq 5$
 - Quantas palavras ela datilografa durante os 5 minutos?
 - Quantas palavras ela datilografa durante os 3 primeiros minutos?
- Estima-se que daqui a x anos a população de uma certa comunidade esteja crescendo a uma taxa de $f(x) = 400 + 100x^{3/2}$. Determine o aumento da população para os próximos 4 anos.
- Estima-se que nos próximos x anos a população de uma certa comunidade estará crescendo a uma taxa de $f(x)$ pessoas por ano, dentro do prazo de 10 anos, onde:
 $f(x) = 200 + 350x^{4/3}$. Qual é o valor esperado da população nos próximos 8 anos?
- Após x anos de uso de uma certa máquina, seu valor contábil estará variando a uma taxa de $f(x)$ unidades por ano, onde: $f(x) = 3000x - 18000$. Qual é a depreciação nos 4 primeiros anos?
- Nos próximos 5 dias quantas pessoas poderão ser expostas a um certo vírus se o cálculo é de que em t dias a partir de agora o vírus terá se disseminado a uma taxa de $f(t) = 9t(8 - t)$ pessoas por dia?
- O valor contábil de um certo equipamento está variando a uma taxa de $f(x)$ unidades monetárias ao ano, quando o equipamento tem x anos de uso, e $f(x) = 4000x - 60000$. Determine por quanto o equipamento será depreciado durante o terceiro ano.
- Numa certa comunidade, t dias após o início de uma epidemia, sua taxa de crescimento é $f(t)$ pessoas por dia, onde: $f(t) = 2t(50 - 3t)$.
 - Quantas pessoas são infectadas durante a primeira semana de epidemia?
 - E no oitavo dia de epidemia?
- Numa pequena cidade um boato se espalha a uma taxa de $f(t)$ pessoas por hora desde seu começo, e $f(t) = 40t - 3t^2$.
 - Quantas pessoas ouviram o boato durante as 5 primeiras horas?
 - Quantas novas pessoas ouviram o boato durante a sexta hora?
- O gerente de um parque de diversões espera que durante o primeiro mês de operações o número diário de visitantes cresça de tal forma que $f(t)$ visitantes sejam esperados t dias após sua abertura, onde $f(t) = 9800 + 40t$.

- a) Em que dia é esperado o 100.000º visitante?
b) Quantos visitantes são esperados durante os 5 primeiros dias?
10. Suponha que a utilização de uma certa máquina resulte numa receita a uma taxa de $R(x)$ unidades monetárias por mês, se x meses se passaram desde a instalação da máquina, e $R(x) = 144 - 2x^2$. Além disso, vamos admitir que o custo operacional esta variando a uma taxa $C(x)$ unidades monetárias por mês, onde $C(x) = 200 + x^2$.
- a) Por quanto tempo o uso do equipamento é rentável.
b) Qual é o lucro líquido obtido pela utilização da máquina durante o tempo acima.
11. A utilização de um certo equipamento gera uma receita a uma taxa de $R(x)$ unidades monetárias por mês e um custo operacional a uma taxa de $C(x)$ unidades monetárias por mês. Sabendo que $R(x) = 1400 - 2x^2$ e $C(x) = 200 + x^2$. Determine:
- a) Por quanto tempo o uso do equipamento é rentável?
b) Qual é o lucro líquido obtido pela utilização da máquina durante o tempo acima.
12. Quando um certo equipamento está com x anos de uso, ela gera uma receita total a uma taxa de $R(x) = 15000 - 80x^2$ unidades monetárias anuais. O custo total de operação e manutenção aumenta com o tempo a taxa de $C(x) = 3000 + 40x^2$ unidades monetárias por ano.
- a) Por quanto tempo o uso do equipamento é rentável?
b) Qual é o lucro líquido obtido pela utilização da máquina durante o tempo acima.
13. O uso de determinada máquina x meses após sua compra gera uma receita total a uma taxa de $R(x) = 11000 - 3x^2$ unidades monetárias mensais. O custo total de operação e manutenção da máquina aumenta a uma taxa $C(x) = 1000 + x^2$ unidades monetárias mensais.
- a) Por quanto tempo o uso do equipamento é rentável?
b) Qual é o lucro líquido obtido pela utilização da máquina durante o tempo acima.
14. Se, daqui a x anos, um plano de investimentos estiver gerando lucro à razão de \$ $L_1(x) = 100 + x^2$ / ano e, um segundo plano gerando lucro à razão de \$ $L_2(x) = 220 + 2x$ / ano :
- a) Por quantos anos o segundo plano será o mais lucrativo?
b) Qual o lucro excedente que se ganhará investindo-se no segundo plano, em vez de no primeiro, por um período igual ao de (a)?
c) Interprete o lucro excedente encontrado em (b) com a área compreendida entre duas curvas.
15. Admita que, aos x anos de idade, uma máquina industrial gere uma receita à razão de $R(x) = 5000 - 20x^2$ reais/ano e acarrete gastos de se acumulam à razão de $c(x) = 2000 + 10x^2$ reais /ano.
- a) Por quantos anos o uso da máquina será lucrativo?

- b) Qual será o ganho líquido gerado pela máquina durante o período do item (a)
16. Dada a função Demanda $D(x) = 2(64 - x^2)$ reais por unidade e p por unidade.
- a) Determine o excedente do consumidor se o preço de mercado de cada unidade do produto for $p_0 = \$110,00$ por unidade.
- b) Construa a curva de demanda e interprete o excesso do consumidor como uma área.
17. As equações de oferta e demanda para uma certa mercadoria são respectivamente, $3p^2 + p - x = 0$ e $3p + x = 32$ onde p é o preço unitário e x unidades é a quantidade. Determine o excedente do consumidor se prevalecer o equilíbrio de mercado, e faça um esboço mostrando a região cuja área dá o excedente do consumidor.
18. As equações de oferta e demanda para uma certa mercadoria são respectivamente, $3p^2 + p - x = 0$ e $3p + x = 32$ onde p é o preço unitário e x unidades é a quantidade. Determine o excedente do produtor se prevalecer o equilíbrio de mercado, e faça um esboço mostrando a região cuja área dá o excedente do produtor.
19. A equação de demanda de certa mercadoria é $100p = 2400 - 20x - x^2$, e preço de mercado é \$ 16. Ache o excedente do consumidor e faça um esboço mostrando a região cuja área o determina.
20. Ache o excedente do produtor para uma mercadoria cuja equação de oferta é $2x^2 - 300p + 900 = 0$ e cujo preço de mercado é \$ 9. Faça um esboço mostrando a região cuja área determina o excedente do produtor.
21. Para um certo artigo a equação de demanda é $x^2 + 100p = 2500$ e o preço de mercado é \$16. Ache o excedente do consumidor (integrando em relação a x).
22. As equações de demanda e oferta para uma certa mercadoria são respectivamente $x = 760 - p^2$ e $x = p^2 - 40$. Ache os excedentes do consumidor e do produtor se o mercado está em equilíbrio.