BUSINESS&MARKETINGSCHOOL ESIC
FACULDADE INTERNACIONAL

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Prof. Gilmar Bornatto

Material de apoio para o curso de Administração.

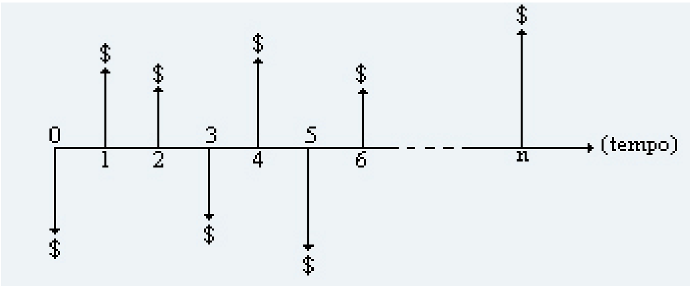
ÍNDICE

CONCEITOS BÁSICOS

1- CONCEITO DE FLUXO DE CAIXA

Fluxo de caixa (de uma empresa, de um financiamento, de um investimento, etc.) é um conjunto de entradas e saídas de caixa (dinheiro) ao longo do tempo.

A representação de um fluxo de caixa ao longo do tempo pode ser feita através de um diagrama, como mostra a figura abaixo:



onde a escala horizontal representa o tempo (em meses, trimestres, semestres, anos, etc.); as flechas para baixo correspondem a saídas de caixa ou despesas e terão sinais negativos; as flechas para cima representam entradas de caixa ou receitas e terão sinais positivos.

2-A MATEMÁTICA FINANCEIRA E SEUS OBJETIVOS

A matemática financeira é o ramo da matemática que estuda o comportamento do dinheiro no tempo e tem por objetivo o manuseio, a transformação e a comparação de fluxos de caixa.

3-MOEDA ESTÁVEL E INFLAÇÃO

Os conceitos de matemática financeira desenvolvidos neste trabalho são exatamente os mesmos, tanto para os fluxos de caixa sem inflação, expressos em moeda estável (tem o mesmo poder aquisitivo ao longo do tempo), como para os fluxos de caixa com inflação, expressos em moeda corrente, que perde o seu poder aquisitivo ao longo do tempo.

4-O CAPITAL E O JURO

Denomina-se capital a qualquer quantidade de moeda ou dinheiro que uma pessoa, física ou jurídica, aplica ou empresta para outra durante certo tempo.

O juro pode ser definido como a compensação financeira conseguida por um aplicador durante certo tempo ou ainda o custo do capital para uma pessoa, que durante certo tempo, usa o capital de outra.

O juro é cobrado em função de um coeficiente, chamado taxa de juro, que é dado geralmente em termos percentuais e sempre referido a um intervalo de tempo, tomado como unidade, denominado período financeiro.

A taxa de juro é a razão entre os juros recebidos (ou pagos) no fim de um período financeiro e o capital aplicado.

Exemplo: Suponhamos que a aplicação de R$ 150,00 tenha produzido, ao fim de um mês, a quantia de R$ 4,50 de juros.

Valor aplicado $\rightarrow$ R$ 150,00

Juros obtidos $\rightarrow$ R$ 4,50

Taxa de juro $\rightarrow \dfrac{4{,}50}{150{,}00} = 0{,}03 = 3\%$ ao mês

Observação:

A taxa de juros pode ser representada sob duas formas:

- taxa percentual: quando representar os juros de 100 (cem) unidades de capital durante o período financeiro a que se refere;
- taxa unitária: quando representar, nas mesmas condições, os juros de uma unidade de capital.

Exemplo: Seja a taxa de juros de 15% ao ano.

$$15\% = \frac{15}{100} = 0,15$$

$$\begin{cases} 15\% \text{ ao ano} \Rightarrow \text{taxa percentual} \\ 0,15 \text{ ao ano} \Rightarrow \text{taxa unitária} \end{cases}$$

As taxas de juros, neste trabalho, quando inseridas nos enunciados e nas respostas dos exercícios serão, sempre, indicadas na forma percentual, porém, todos os cálculos e desenvolvimento de fórmulas serão feitos através da notação em fração decimal (taxa unitária).

5-REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO

- A sucessiva incorporação dos juros ao principal ao longo dos períodos financeiros, denomina-se capitalização.
- Regime de capitalização simples: quando os rendimentos são devidos única e exclusivamente sobre o principal, ao longo dos períodos financeiros a que se refere a taxa de juros.
- Regime de capitalização composta: quando ao fim de cada período de tempo, a que se refere a taxa de juros, os rendimentos são incorporados ao capital anterior e passam, por sua vez, a render juros no período seguinte.

6-O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO

Do ponto de vista da Matemática Financeira, R$ 10.000,00 hoje não são iguais a R$ 10.000,00 em uma outra data qualquer, pois o dinheiro cresce no tempo ao longo dos períodos, devido à presença da taxa de juros.

Assim, sob a ótica da Matemática Financeira devemos observar que:

a) os valores presentes em uma mesma data são grandezas que podem ser comparadas e somadas algebricamente;

b) os valores presentes em datas diferentes são grandezas que só podem ser comparadas e somadas algebricamente após serem movimentadas para uma mesma data, com a devida aplicação de uma taxa de juros.

7-CLASSIFICAÇÃO DOS JUROS

Os juros são classificados em **simples** ou **compostos**, de acordo com o regime de capitalização em que se está trabalhando.

7.1-Exemplo Numérico de Juros simples:

Suponhamos que um indivíduo tenha feito, hoje, uma aplicação no valor de R$ 100,00, em um banco que remunera suas aplicações a juros simples, à razão de 20% ao ano. Qual será seu saldo credor no final de cada um dos próximos cinco anos?

PLANILHA DO CRESCIMENTO DO DINHEIRO AO LONGO DO TEMPO

ESCALA	FINAL DO	SALDO INICIAL	JUROS	SALDO FINAL
0	-	-	-	R$ 100,00
1	1º ano	R$ 100,00	$0,20 \times 100,00 = 20,00$	R$ 120,00
2	2º ano	R$ 120,00	$0,20 \times 100,00 = 20,00$	R$ 140,00
3	3º ano	R$ 140,00	$0,20 \times 100,00 = 20,00$	R$ 160,00
4	4º ano	R$ 160,00	$0,20 \times 100,00 = 20,00$	R$ 180,00
5	5º ano	R$ 180,00	$0,20 \times 100,00 = 20,00$	R$ 200,00

É importante observar, que neste caso, o banco sempre aplica a taxa de juros de 20%a.a. sobre o capital inicial de R$ 100,00, e não permite que o indivíduo retire os juros produzidos em cada período. Assim, apesar dos juros estarem sempre à disposição do banco, eles não são remunerados por parte da Instituição.

7.2-Exemplo Numérico de Juros Compostos:

Vamos supor, agora, que a aplicação do exemplo anterior, tenha sido feita a juros compostos. Qual seria o saldo credor do indivíduo ao final de cada um dos próximos cinco anos?

PLANILHA DO CRESCIMENTO DO DINHEIRO AO LONGO DO TEMPO

ESCALA	FINAL DO	SALDO INICIAL	JUROS	SALDO FINAL
0	-	-	-	R$ 100,00
1	1º ano	R$ 100,00	$0,20 \times 100,00 = 20,00$	R$ 120,00
2	2º ano	R$ 120,00	$0,20 \times 120,00 = 24,00$	R$ 144,00
3	3º ano	R$ 144,00	$0,20 \times 144,00 = 28,80$	R$ 172,80
4	4º ano	R$ 172,80	$0,20 \times 172,80 = 34,56$	R$ 207,36
5	5º ano	R$ 207,36	$0,20 \times 207,36 = 41,47$	R$ 248,83

É importante observar, que neste caso, o banco sempre aplicou a taxa de juros de 20%a.a. sobre o saldo existente no início de cada período financeiro. Assim, após cada período, os juros são incorporados ao saldo anterior e passam, por sua vez, a render juros no período seguinte.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01) Um investidor aplicou R$ 2.000,00 numa instituição financeira que remunera seus depósitos a uma taxa de 6% ao trimestre, no regime de juros simples. Mostrar o crescimento desse capital no final de cada trimestre, a contar da data da aplicação dos recursos, e informar o montante que poderá ser retirado pelo investidor no final do quinto trimestre, após a efetivação do depósito. Resposta: R$ 2.600,00

02) Um investidor aplicou R$ 2.000,00 numa instituição financeira que remunera seus depósitos a uma taxa de 6% ao trimestre, no regime de juros compostos. Mostrar o crescimento desse capital no final de cada trimestre, a contar da data da aplicação dos recursos, e informar o montante que poderá ser retirado pelo investidor no final do quinto trimestre, após a efetivação do depósito. Resposta: R$ 2.676,45

03) Suponha que a aplicação de R$ 5.000,00 tenha produzido ao final de um trimestre a quantia de R$ 190,00 de juros. Qual foi a taxa percentual trimestral da aplicação? Resposta: 3,8% a.t.

JUROS SIMPLES

1- CÁLCULO DOS JUROS SIMPLES

1.1- Simbologia a ser adotada

Como forma de simplificação e uniformização de procedimentos no desenvolvimento teórico dos juros simples, será usada a seguinte notação:

P = principal, valor presente, valor atual, ou seja, valor do capital no dia de hoje;
i = taxa efetiva de juros por período de capitalização;
n = número de períodos de capitalização;
j = valor dos juros;
S = montante, valor futuro, ou seja, valor do capital no fim de n períodos.

1.2- Expressão para o cálculo dos juros

Os juros simples incidem unicamente sobre o principal e geram rentabilidade ou custo, que são diretamente proporcionais ao capital e ao prazo da operação.

Assim, o valor dos juros no final do primeiro período é dado por Pi, no final do segundo período por 2Pi, no final do terceiro período por 3Pi e assim, sucessivamente.

O total de juros acumulados no final de n períodos será dado, portanto, pela fórmula:

$$\boxed{j = Pin}$$

Exemplo: Calcular os juros simples referentes a um empréstimo no valor de R$ 8.000,00, à taxa de 3% ao mês, durante 4 meses.

Solução:

P = R$ 8.000,00
i = 3% a.m.
n = 4 meses

$j = Pin \quad \Rightarrow \quad j = 8.000 \times 0{,}03 \times 4 \quad \Rightarrow \quad j = R\$\ 960{,}00$

1.3- Expressão para o cálculo do montante

O montante **S**, ao fim de **n** períodos, resultante da aplicação do capital **P** à taxa **i** de juros simples, é dado por:

S = P + j , ou seja, Montante = Principal + juros.

Logo, S = P + Pin

Colocando-se P em evidência, resulta:

$$\boxed{S = P(1 + in)}$$

Exemplo: Determinar o montante, ao fim de 5 meses, correspondente a uma aplicação no valor de R$ 6.000,00, à taxa de 4% ao mês, no regime de juros simples.

Solução:

P = R$ 6.000,00
i = 4% a.m.
n = 5 meses
S = P(1 + in)

$S = 6.000\ (1 + 0{,}04 \times 5) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S = R\$\ 7.200{,}00}$

1.4- Expressão para o cálculo do valor atual

Para o cálculo do valor atual (P) que produzirá o montante (S) daqui a n períodos a uma taxa (i) de juros simples basta inverter a relação anterior, isto é:

$$\boxed{P = \frac{S}{1 + in}}$$

Exemplo: Qual o valor que se deve aplicar hoje para se obter o montante de R$ 8.000,00, daqui a 6 meses, a uma taxa de juros de 4% ao mês.

Solução:

S = R$ 8.000,00
I = 4% ao mês
N = 6 meses

$$P = \frac{S}{1 + in} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{8.000}{1 + 0{,}04 \times 6} = \frac{8.000}{1{,}24} = 6.451{,}61$$

1.5- Juros Comerciais e Juros exatos

1.5.1- Juros Comerciais:

São os juros obtidos quando se considera o ano com 360 dias (ano comercial) e o mês com 30 dias (mês comercial).

1.5.2- Juros Exatos:

São os juros obtidos quando se considera o ano com 365 dias ou 366 dias (ano bissexto).

Exemplo: Um capital de R$ 15.000,00 esteve aplicado durante 45 dias à taxa de juros simples de 30% a.a. Determinar os juros comerciais e os juros exatos dessa aplicação.

- **Juros comerciais**

$$j = 15.000 \times 0{,}30 \times \frac{45}{360} \quad \Rightarrow \quad j = R\$\ 562{,}50$$

- **Juros exatos**

$$j = 15.000 \times 0{,}30 \times \frac{45}{365} \quad \Rightarrow \quad j = R\$\ 554{,}79$$

1.6 - Expressão para o cálculo da taxa no período da aplicação

Fazendo n = 1 (um período) na fórmula dos juros j = Pin, teremos:

$$J = PI \quad \Rightarrow \quad i = \frac{j}{P} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{S-P}{P} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{S}{P} - \frac{P}{P} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{S}{P} - 1}$$

Exemplo: Um capital de R$ 10.000,00 foi aplicado a juros simples, durante 5 meses, gerando um, montante de R$ 10.750,00.

a) Determine a taxa de juros do período da aplicação;
b) Determine a taxa mensal de juros da aplicação.

Solução:

P = R$ 10.000,00
S = R$ 10.750,00
N = 5 meses

a) $i = \frac{S}{P} - 1 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{10.750}{10.000} - 1$ ou $i = 0{,}075 = 7{,}5\%$ (no período de 5 meses)

b) $i = 7{,}5\% \div 5 = 1{,}5\%$ a.m.

2- TAXAS PROPORCIONAIS E TAXAS EQUIVALENTES

2.1- Conceitos

- Duas ou mais taxas de juros são proporcionais quando os seus valores e os períodos a que elas se referem estão na mesma razão.

Assim, 20% ao ano e 5% ao trimestre são taxas proporcionais, pois $\frac{20}{5} = \frac{12 \text{ meses}}{3 \text{ meses}}$

- Duas ou mais taxas de juros são equivalentes quando ao serem aplicadas a um mesmo principal, durante um mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo montante.

Observação: É importante notar, que no regime de juros simples as taxas proporcionais são, também, equivalentes.

Exemplo: Seja calcular o montante de uma aplicação de R$ 5.000,00 pelo prazo de 6 meses, utilizando as taxas proporcionais 20% a.a. e 5% a.t., respectivamente.

a) $S = 5.000\ (1 + 0{,}20 \times \frac{6}{12}) \Rightarrow S = R\$\ 5.500{,}00$

b) $S = 5.000\ (1 + 0{,}05 \times 2) \Rightarrow S = R\$\ 5.500{,}00$

Conforme podemos observar, os dois montantes são iguais e, portanto, as taxas de 20% a.a. e 5% a.t. são, também, equivalentes.

2.2- Relações entre as taxas proporcionais.

Inicialmente, vamos definir:

i_a = taxa anual de juros.
i_s = taxa semestral de juros.
i_t = taxa trimestral de juros.
i_m = taxa mensal de juros.
i_d = taxa diária de juros.

Com base no conceito de taxas proporcionais, podemos escrever:

$S = P(1 + i_a \times 1) = P(1 + i_s \times 2) = P(1 + i_t \times 4) = P(1 + i_m \times 12) = P(1 + i_d \times 360).$

Simplificando os termos comuns, concluímos que:

$$\boxed{i_a = 2i_s = 4i_t = 12i_m = 360i_d}$$

Aplicação: Determine a taxa mensal proporcional a 45% ao ano.

Solução:

$i_a = 12i_m \Rightarrow 45\% = 12i_m \Rightarrow i_m = \frac{45\%}{12} = 3{,}75\%$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01- Que capital deverá ser aplicado à taxa de 10% ao trimestre, para produzir ao final de 2 anos, o montante de R$ 14.400,00, no regime de capitalização simples?

Solução:

S = R$ 14.400,00
i = 10 % a. t.
n = 2 anos = 8 trimestres
P = ?

$S = P\ (1 + in) \Rightarrow 14.400 = P\ (1 + 0{,}10 \times 8) \Rightarrow P = \frac{14.400}{1{,}80} \Rightarrow P = R\$\ 8.000{,}00$

02- A que taxa mensal de juros simples deve-se aplicar o capital de R$ 15.000,00 para que em 3 meses e 15 dias, produza o montante de R$ 17.100,00?

Solução:

P = R$ 15.000,00
S = R$ 17.100,00
n = 3 meses e 15 dias = 105 dias
i = ?

$S = P\ (1 + in)$

$17.100 = 15.000\ (1 + i \times \frac{105}{30}) \Rightarrow \frac{17.100}{15.000} = 1 + 3{,}5\ i$

$1{,}14 = 1 + 3{,}5\ i \Rightarrow 3{,}5i = 0{,}14 \Rightarrow i = \frac{0{,}14}{3{,}5} = 0{,}04$ ou $i = 4\%$ a.m.

03- Durante quanto tempo o capital de R$ 28.000,00 deve ser empregado, a juros simples, à taxa de 54% ao ano, para produzir o montante de R$ 38.080,00?

Solução:

P = R$ 28.000,00
S = R$ 38.080,00
i = 54 % a.a.
n = ?

S = P (1 + in)

38.080 = 28.000 (1 + 0,54 $\times$ n)

$$\frac{38.080}{28.000} = 1 + 0{,}54n \Rightarrow 1{,}36 = 1 + 0{,}54n \Rightarrow 0{,}54n = 0{,}36 \Rightarrow n = \frac{0{,}36}{0{,}54} = 0{,}666666\ldots \text{ anos}$$

ou 0,666666...× 12 = 8 $\Rightarrow$ n = 8 meses.

04- Um título, cujo valor de resgate, daqui a 3 meses, é R$ 8.000,00, foi adquirido hoje, por um fundo, pelo valor de R$ 7.561,44. Qual a taxa de rendimento do papel no período?

Solução:

S = R$ 8.000,00
P = R$ 7.561,44
n = 3 meses
i = ?

$$i = \frac{S}{P} - 1 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{8.000{,}00}{7.561{,}44} - 1 = 0{,}058 = 5{,}8\% \text{ ao trimestre}$$

05- Uma aplicação financeira com prazo de 6 meses, rende juros simples à taxa de 30% ao ano. Sabendo-se que o imposto de renda, pago no resgate, é igual a 20% do juro produzido, pergunta-se:

a) Qual o montante líquido de uma aplicação de R$ 10.000,00?
b) Qual o capital que deve ser aplicado para produzir um montante líquido de R$ 8.750,00?

Solução:

a) Montante Líquido: S' = P + j – IR (onde IR = Imposto de Renda)

$$j = Pin \Rightarrow j = 10.000 \times 0{,}30 \times \frac{6}{12} = 1.500$$

IR = 0,20 × 1.500 = 300

S' = 10.000 + 1.500 – 300 $\Rightarrow$ S' = R$ 11.200,00

b) Sendo P o capital procurado, segue-se que:

8.750 = P + j – IR

8.750 = P + j – 0,20j

8.750 = P + 0,80j

$$8.750 = P + 0{,}80 \left[P(0{,}30) \left(\frac{6}{12}\right) \right]$$

$$8.750 = P + 0{,}12P \Rightarrow 8.750 = 1{,}12P \Rightarrow P = \frac{8.750}{1{,}12} = 7.812{,}50 \Rightarrow P = \text{R\$ } 7.812{,}50$$

06- Um capital de R$ 50.000,00 foi aplicado à taxa de 54% ao ano, no regime de capitalização simples, pelo prazo de 27 dias. Determinar o valor dos juros exatos dessa aplicação.

Solução:

P = R$ 50.000,00
i = 54% a.a.
n = 27 dias
j = ?

$$j = Pin \Rightarrow j = 50.000 \times 0{,}54 \times \frac{27}{365} \Rightarrow j = \text{R\$ } 1.997{,}26$$

07- Um capital de R$ 10.000,00 foi aplicado à taxa de 30% ao ano, no regime de capitalização simples, pelo prazo de 45 dias:

a) Determinar os juros exatos dessa aplicação;
b) Determinar os juros comerciais dessa aplicação.

Solução:

P = R$ 10.000,00
i = 30% a.a.
n = 45 dias
j = ?

a) $j = Pin \Rightarrow j = 10.000 \times 0{,}30 \times \dfrac{45}{365} \Rightarrow j = R\$\ 369{,}86$

b) $j = Pin \Rightarrow j = 10.000 \times 0{,}30 \times \dfrac{45}{360} \Rightarrow j = R\$\ 375{,}00$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

Observação: Nos exercícios que seguem, a não ser que seja dito explicitamente o contrário, considere juros comerciais.

01- Determine os juros simples de uma aplicação de R$ 8.500,00 à taxa de 3 % ao mês, durante 5 meses. Resposta: R$ 1.275,00.

02- Aplica-se R$ 5.000,00 a uma taxa mensal de 2,5%. Calcule os juros simples produzidos após 3 meses. Resposta: R$ 375,00.

03- Aplica-se a quantia de R$ 5.400,00 à taxa de 2% ao mês, no regime de capitalização simples. Qual é o montante obtido ao fim de 4 meses? Resposta: R$ 5.832,00.

04- Determine os juros e o montante de uma aplicação de R$ 10.000,00, no regime de capitalização simples, nos seguintes casos:

a) à taxa de 22% ao ano, após um ano; Resposta: R$ 2.200,00 e R$ 12.200,00.

b) à taxa de 30% ao ano, após 8 meses; Resposta: R$ 2.000,00 e R$ 12.000,00.

c) à taxa de 18% ao ano, após 45 dias; Resposta: R$ 225,00 e R$ 10.225,00.

d) à taxa de 2,5% ao mês, após 5 meses; Resposta: R$ 1.250,00 e R$ 11.250,00.

e) à taxa de 3,5% ao mês, após 21 dias; Resposta: R$ 245,00 e R$ 10.245,00.

f) à taxa de 2% ao mês, após um ano. Resposta: R$ 2.400,00 e R$ 12.400,00

05- A que taxa mensal de juros simples:

a. o capital de R$ 8.000,00 produz, em um ano, R$ 3.648,00 de juros? Resposta:3,8% a.m
b) o capital de R$ 6.500,00 produz, em 5 meses, R$ 845,00 de juros? Resposta: 2,6% a.m.
c) o capital de R$ 5.000,00 produz, em 2 meses e 20 dias, R$ 1.000,00 de juros? Resposta: 7,5% a.m.

06- Paulo aplicou R$ 8.000,00 a juros simples à taxa de 22% ao ano. Se ele recebeu R$ 2.200,00 de juros, qual o prazo da aplicação? Resposta: 1 ano e 3 meses.

07- Qual o montante de uma aplicação de R$ 12.000,00, no regime de capitalização simples, à taxa de 5% ao mês, após 3 meses? Resposta: R$ 13.800,00.

08- Qual o montante de uma aplicação de R$ 7.500,00 ao fim de 6 meses e 17 dias, à taxa de 72% ao ano, no regime de capitalização simples? Resposta: R$ 10.455,00.

09- Quanto se deve aplicar hoje, para se obter um valor de resgate de R$ 15.200,00, ao fim de 2 anos, à taxa de 4% ao mês, no regime de capitalização simples? Resposta: R$ 7.755,10.

10- Que quantia se deve aplicar à taxa de 42% ao ano, durante 5 meses e 10 dias, no regime de capitalização simples, para se obter o montante de R$ 7.751,25? Resposta: R$ 6.531,95

11- Um aparelho de som é vendido à vista por R$ 820,00 ou por R$ 164,00 de entrada mais uma parcela de R$ 721,60 após 2 meses. Qual a taxa de juros simples cobrada? Resposta: 5% ao mês.

12- Uma geladeira é vendida à vista por R$ 1.500,00 ou então a prazo com R$ 450,00 de entrada mais uma parcela de R$ 1.200,00 após 4 meses. Qual a taxa mensal de juros simples cobrada? Resposta: 3,57% a.m.

13- Certo capital acrescido dos juros simples, calculados à taxa de 22% ao ano, em um mês e dez dias, importa em R$ 7.376,00. Determine esse capital. Resposta: R$ 7.200,00.

14- Um vestido de noiva é vendido à vista por R$ 2.400,00 ou, então, a prazo com 20% de entrada mais uma parcela de R$ 2.150,00 dois meses após a compra. Qual a taxa mensal de juros simples cobrada? Resposta: 5,99% a.m.

15- Foi contraído um empréstimo no valor de R$ 20.000,00 no dia 02/06/1994. Qual foi o valor resgatado no dia 03/12/1994, se a taxa de juros simples cobrada foi de 8% ao mês? (Obs.: O tempo transcorrido entre duas datas deve ser contado de forma exata). Resposta: R$ 29.813,33.

16- Durante quanto tempo um capital deve ser aplicado a juros simples, com taxa de 4% ao mês, para que o seu valor seja triplicado? Resposta: 4 anos e 2 meses.

17- Uma aplicação financeira com prazo de 4 meses, rende juros simples à taxa de 22% ao ano, porém o investidor deve pagar, no ato do resgate, um imposto de renda igual a 20% do valor dos juros auferidos:

a) Qual o montante líquido (montante após o pagamento do imposto de renda) de uma aplicação de R$ 12.000,00? Resposta: R$ 12.704,00.

b) Qual o capital que deve ser aplicado para dar um montante líquido de R$ 11.500,00? Resposta: R$ 10.862,72.

18- Uma pessoa aplicou 1/3 de seu capital a 42% ao ano e o restante a 36% ao ano. No fim de 2 anos, os juros simples obtidos somaram R$ 6.840,00. Qual foi o capital aplicado? Resposta: R$ 9.000,00.

19- A terça parte de um capital foi aplicada a 36% a.a., a quarta parte, a 42% a.a. e o restante a 30% a.a. No fim de 3 anos os juros simples obtidos somaram R$ 15.750,00. Qual foi o capital aplicado? Resposta: R$ 15.000,00.

20- Um capital de R$ 3.000,00 foi aplicado em 23 de março de 1999 a juros simples com taxa de 96% a.a..O resgate foi feito em 17 de setembro de 2000. Determine os juros exatos e os juros comerciais desta aplicação. (O número de dias decorridos foi de 544). Respostas: R$ 4.292,38 e R$ 4.352,00.

21- Aplica-se R$ 12.500,00 a 3,8% ao mês, pelo prazo de 180 dias, no regime de capitalização simples

a)Calcular os juros exatos; Resposta: R$ 2.810,96.
b) Calcular os juros comerciais. Resposta: R$ 2.850,00.

22- Calcular os juros simples exatos do capital R$ 3.800,00, colocado à taxa de 5% a.m., de 2 de janeiro a 28 de maio do mesmo ano. Resposta: R$ 912,00.

23- Um determinado capital aplicado a juros simples exatos, e a certa taxa anual, rendeu R$ 240,00. Determine os juros auferidos nesta aplicação se fossem juros comerciais. Resposta: R$ 243,33

DESCONTOS SIMPLES

1-INTRODUÇÃO

1.1- Conceitos:

- desconto deve ser entendido como sendo o abatimento que o devedor faz jus quando antecipa o pagamento de um título.
- título é um documento usado para formalizar uma dívida que não pode ser paga imediatamente mas que deverá ser liquidada dentro de um determinado prazo previamente estipulado.

1.2-Taxa de Desconto e Taxa de Rentabilidade

Exemplo Numérico:

Um banco realiza operações de desconto de Notas Promissórias de acordo com os seguintes critérios:

- o prazo da operação é de 45 dias;
- a taxa cobrada pelo banco é de 6% ao mês;
- os juros são pagos antecipados.

Assim, se o cliente desejar realizar uma operação de R$10.000,00, deverá assinar uma Nota Promissória nesse valor, com vencimento dentro de 45 dias.

O total dos juros a ser pago antecipadamente é:

$$j = 10.000 \times 0{,}06 \times \frac{45}{30} \Rightarrow j = \text{R\$ } 900{,}00$$

Os dados dessa operação podem, então, ser assim resumidos:

- principal P liberado pelo banco: R$ 9.100,00
- prazo n da operação: 45 dias
- montante S a ser pago no final de 45 dias: R$ 10.000,00

Esses valores podem ser relacionados pela expressão $S = P(1 + in)$, isto é:

$$10.000 = 9.100(1 + i \times \frac{45}{30}) \Rightarrow i = 0{,}065934 \quad \text{ou} \quad i = 6{,}5934\ \%\ \text{a.m.}$$

A taxa i = 6,5934%a.m. é conhecida como taxa de rentabilidade, pois, ao ser aplicada sobre o principal de R$ 9.100,00, proporcionará uma rentabilidade total de R$ 900,00 em 45 dias. Ela é sempre aplicada sobre o principal, pelo prazo que for estabelecido.

A taxa i = 6 % a.m. é conhecida como taxa de desconto, pois, ao ser aplicada sobre o montante de R$ 10.000,00, provocará um desconto de R$ 900,00 em 45 dias. Ela é sempre aplicada sobre o montante, pelo prazo que for estabelecido.

2- Desconto comercial ou por fora:

2.1-Conceitos:

O desconto comercial ou por fora é amplamente utilizado nas operações bancárias e comerciais.

As principais variáveis dessa operação são as seguintes:

- **Desconto** → juros simples cobrado sobre o valor nominal do título, no ato da liberação dos recursos.
- **IOF** → imposto sobre operações financeiras cobrado com base no valor nominal do título, no ato da liberação dos recursos.
- **Prazo** → prazo de vencimento do título considerado para o cálculo dos juros. Esse prazo é a diferença entre a data da liberação dos recursos e a data do vencimento do título.

Exemplo: Uma empresa desconta, num banco, um título no valor de R$ 60.000,00, no dia 10/06/97, com vencimento para 15/07/97. A taxa de desconto simples cobrada pelo banco é de 6 % ao mês. Sabendo-se que a taxa de IOF é de 0,0041% ao dia, determinar o custo efetivo desse empréstimo, em termos de taxa mensal.

Diagrama da operação:

➢ **Cálculo do valor líquido:**

Juros = 60.000 × 0,06 × $\frac{35}{30}$ = 4.200,00

IOF = 60.000 × 0,000041 × 35 = 86,10

Valor líquido = 60.000,00 – 4.200,00 - 86,10 = 55.713,90

➢ **Cálculo do custo efetivo*:***

S = P(1 + in)

60.000,00 = 55.713,90 (1 + i × $\frac{35}{30}$) ⇒ i = 0,0659404 ou i = 6,59404 % a.m.

2.2- Considerações sobre o Saldo Médio:

Para obter uma faixa de desconto de uma duplicata ou de uma promissória nos bancos comerciais, normalmente são consideradas as reciprocidades que o cliente (tomador) oferece. A mais importante costuma ser o saldo médio, que nada mais é que a média diária dos saldos mantidos em conta corrente durante o período considerado.

Quando o cliente precisa descontar uma nota promissória para obter dinheiro emprestado será considerado pelo banco o seu saldo médio, isto é, se não tiver saldo médio poderá ser difícil obter o empréstimo.

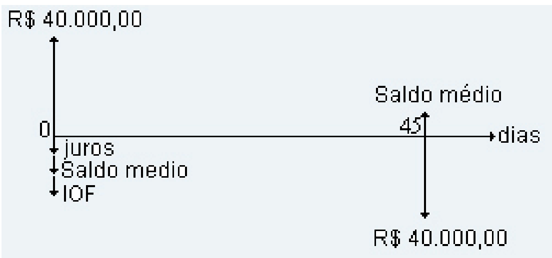
Assim sendo, quando fazemos essa operação estamos pagando por nosso próprio capital que está em reciprocidade no saldo médio. Por isso, esse saldo médio deve ser considerado como custo para quem opera freqüentemente com bancos, como é o caso de empresas que descontam títulos.

Exemplo: Uma empresa desconta num banco uma nota promissória no valor de R$ 40.000,00, com prazo de 45 dias e taxa de desconto de 6 % ao mês. Sabendo-se que a taxa de IOF é de 0,0041% ao dia, e, que o banco exige um saldo médio de 20 % do valor do título, determinar o custo efetivo desse empréstimo.

➢ **Cálculo do custo efetivo:**

S = P(1 + in)

Diagrama da operação:



Solução*:*

Valor do saldo médio ⇒ 0,20 × 40.000,00 = 8.000,00

Valor do desconto (juros) ⇒ 40.000,00 × 0,06 × $\frac{45}{30}$ = 3.600,00

IOF ⇒ 40.000,00 × 0,000041 × 45 = 73,80

Valor disponível ⇒ 40.000,00 - 8.000,00 – 3.600,00 - 73,80 = 28.326,20

Valor a ser desembolsado no vencimento $\Rightarrow$ 40.000,00 - 8.000,00 = 32.000,00
Cálculo da taxa mensal de custo efetivo:

$$S = P\ (1 + in)$$

$$32.000,00 = 28.326,20\ \left(1 + i \times \frac{45}{30}\right) \Rightarrow i = 0,08646 \text{ ou } \mathbf{i = 8,646\ \%\ a.m.}$$

2.3- Relação Entre Taxa de Desconto e Taxa de Rentabilidade

➢ Simbologia a ser adotada:

d = taxa de desconto por período
i = taxa de rentabilidade por período
D_c = desconto comercial
N = valor nominal do título (valor de face)
P = principal, valor presente ou valor atual
n = número de períodos (prazo)

Conforme podemos observar nos exercícios anteriores, o desconto comercial equivale aos juros simples cobrados sobre o valor nominal do título, isto é:

$$\boxed{D_c = Ndn}$$

O valor atual ou valor presente de um título é, por definição, igual ao valor nominal menos o desconto, isto é:

$$P = N - D_c \Rightarrow P = N - Sdn \Rightarrow \boxed{P = N\ (1 - dn)} \quad (1)$$

A taxa de rentabilidade i, é calculada através da fórmula do montante, isto é:

$$N = P\ (1 + in) \Rightarrow \boxed{P = \frac{N}{1+in}} \quad (2)$$

Comparando as relações (1) e (2), podemos escrever:

$$N\ (1 - dn) = \frac{N}{1+in}$$, de onde se conclui que:

$$\boxed{i = \frac{d}{1-dn}}$$ $\Rightarrow$ (taxa de rentabilidade i, a partir da taxa de desconto d, e do número de períodos n)

$$\boxed{d = \frac{i}{1+in}}$$ $\Rightarrow$ (taxa de desconto d, a partir da taxa de rentabilidade i, e do número de períodos n)

Aplicações:

Consideremos, como exemplo, o problema seguinte, já mencionado anteriormente:

Uma empresa desconta, num banco, um título no valor de R$ 60.000,00, no dia 10/06/97, com vencimento para 15/07/97. A taxa de desconto cobrada pelo banco é de 6% a.m. Sabendo-se que a taxa de IOF é de 0,0041% ao dia, determinar:

a) o valor do desconto comercial;
b) o valor atual ou valor presente do título;
c) a taxa de rentabilidade do banco;
d) o custo efetivo desse empréstimo para a empresa.

Solução:

N = R$ 60.000,00
d = 6% a.m.
n = 35 dias
Taxa de IOF = 0,0041% ao dia

a) $D_c = Ndn \Rightarrow D_c = 60.000,00 \times 0,06 \times \frac{35}{30} \rightarrow$ **D_c = R$ 4.200,00**

b) $P = N(1 - dn) \Rightarrow P = 60.000,00\,(1 - 0,06 \times \frac{35}{30}) \Rightarrow$ **P = R$ 55.800,00**

c) $i = \frac{d}{1-dn} \Rightarrow i = \frac{0,06}{1-0,06\times\frac{35}{30}} \Rightarrow i = 0,0,064516$ ou **i = 6,4516 % a.m.**

d) IOF = 0,0041% a. d. ou 0,123% a.m.

Total tributado $\Rightarrow$ 0,123 % a.m. + 6 % a.m. = 6,123 % a.m.

$i = \frac{d}{1-dn} \Rightarrow i = \frac{0,06123}{1-0,06123\times\frac{35}{30}} \Rightarrow i = 0,0659404$ ou **i = 6,59404 % a.m.**

2.4- Operações com um conjunto de títulos:

No caso de um conjunto de títulos, o valor atual comercial será dado pela soma dos valores atuais de cada título.

Exemplo: Uma empresa apresenta o seguinte borderô de duplicatas para serem descontadas num banco à taxa de desconto comercial de 4% a.m.. Qual o valor líquido recebido pela empresa?

Duplicata	Valor	Prazo
A	R$ 10.000,00	45 dias
B	R$ 15.000,00	60 dias
C	R$ 14.000,00	75 dias

Solução:

Duplicata A

$D_c = 10.000 \times 0,04 \times \frac{45}{30} = 600 \Rightarrow V_{liq} = 9.400,00$

Duplicata B

$D_c = 15.000 \times 0,04 \times 2 = 1.200 \Rightarrow V_{liq} = 13.800,00$

Duplicata C

$D_c = 14.000 \times 0,04 \times \frac{75}{30} = 1.400,00 \Rightarrow V_{liq} = 12.600,00$

Resposta: $V_{liq} = 9.400 + 13.800 + 12.600 = 35.800,00$

O total dos descontos é: $D_c = 600,00 + 1.200,00 + 1.400,00 = 3.200,00$

2.5- Taxa média - Prazo médio

A importância do conhecimento dos conceitos de taxa média, prazo médio se deve ao grande desenvolvimento verificado no mercado financeiro e no mercado de capitais, no Brasil, nos últimos anos.

2.5.1- Taxa média

A taxa média é a taxa com a qual se deve descontar um conjunto de títulos para se obter o mesmo desconto que seria obtido, caso esses títulos fossem descontados com suas respectivas taxas de descontos.

A taxa média é obtida por meio da média ponderada, onde o valor nominal e o prazo representam os pesos.

Sejam: $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_h$ os valores nominais dos títulos com prazos iguais a $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_h$ e taxas de desconto comercial iguais a $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_h$, respectivamente.

Chamando de $\bar{\mathbf{d}}$ a taxa média de desconto, teremos:

$$N_1 \bar{\mathbf{d}}\, n_1 + N_2 \bar{\mathbf{d}}\, n_2 + N_3 \bar{\mathbf{d}}\, n_3 + \ldots + N_h \bar{\mathbf{d}}\, n_h = N_1 d_1 n_1 + N_2 d_2 n_2 + N_3 d_3 n_3 + \ldots + N_h d_h n_h$$

$$(N_1 n_1 + N_2 n_2 + N_3 n_3 + \ldots + N_h n_h)\, \bar{\mathbf{d}} = N_1 d_1 n_1 + N_2 d_2 n_2 + N_3 d_3 n_3 + \ldots + N_h d_h n_h$$

$$\bar{d} = \frac{N_1 d_1 n_1 + N_2 d_2 n_2 + N_3 d_3 n_3 + \ldots + N_h d_h n_h}{N_1 n_1 + N_2 n_2 + N_3 n_3 + \ldots + N_h n_h}$$

Exemplo: Calcular a taxa média no desconto comercial do seguinte conjunto de títulos:

VALOR NOMINAL	PRAZO	TAXA DE DESCONTO
R$ 5.000,00	4 meses	3% a.m.
R$ 2.000,00	5 meses	4% a.m.
R$ 8.000,00	6 meses	5% a.m.

$$\bar{d} = \frac{5000 \times 0{,}03 \times 4 + 2000 \times 0{,}04 \times 5 + 8000 \times 0{,}05 \times 6}{5000 \times 4 + 2000 \times 5 + 8000 \times 6}$$

$$\bar{d} = \frac{600 + 400 + 2400}{20000 + 10000 + 48000} = \frac{3400}{78000} = 0{,}043590 \quad \text{ou} \quad 4{,}3590\%\ \text{a.m.}$$

Observação: Esta taxa média significa que, se os três títulos fossem descontados a uma taxa única de 4,359% ao mês, produziriam o mesmo desconto que seria produzido caso esses títulos fossem descontados às taxas de 3% ao mês, 4% ao mês e 5% ao mês, respectivamente.

Comprovação:

a) Valor do desconto calculado com base nos valores nominais, taxas e prazos especificados para cada título.

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= 5000 \times 0{,}03 \times 4 = 600{,}00 \\ D_2 &= 2000 \times 0{,}04 \times 5 = 400{,}00 \\ D_3 &= 8000 \times 0{,}05 \times 6 = 2.400{,}00 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D_c = \text{R\$ } 3.400{,}00$$

a) Valor do desconto calculado com base nos valores nominais e nos prazos especificados em cada título e, na taxa média.

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= 5000 \times 0{,}04359 \times 4 = 871{,}80 \\ D_2 &= 2000 \times 0{,}04359 \times 5 = 435{,}90 \\ D_3 &= 8000 \times 0{,}04359 \times 6 = 2.092{,}32 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D_c = \text{R\$ } 3.400{,}02$$

2.5.2-Prazo médio

O prazo médio é o prazo único com o qual se deve descontar um conjunto de títulos para se obter o mesmo desconto que seria obtido caso os títulos fossem descontados com os seus respectivos prazos.

O prazo médio é obtido pela média ponderada, onde o valor nominal e a taxa representam os pesos. Assim, representando por $\bar{n}$ o prazo médio de um conjunto de títulos, no desconto comercial, temos:

$$N_1 d_1 \bar{n} + N_2 d_2 \bar{n} + N_3 d_3 \bar{n} + \ldots + N_h d_h \bar{n} = N_1 d_1 n_1 + N_2 d_2 n_2 + N_3 d_3 n_3 + \ldots N_h d_h n_h$$

Colocando $\bar{n}$ em evidência, resulta:

$$(N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3 + \ldots + N_h d_h)\, \bar{n} = N_1 d_1 n_1 + N_2 d_2 n_2 + N_3 d_3 n_3 + \ldots N_h d_h n_h$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{N_1 d_1 n_1 + N_2 d_2 n_2 + N_3 d_3 n_3 + \ldots + N_h d_h n_h}{N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3 + \ldots + N_h d_h}$$

Exemplo: Calcular o prazo médio do seguinte conjunto de títulos no desconto comercial.

VALOR NOMINAL	PRAZO	TAXA DE DESCONTO
R$ 10.000,00	4 meses	6% a.m.
R$ 5.000,00	3 meses	4% a.m.
R$ 8.000,00	5 meses	5% a.m.

Solução:

$$\bar{n} = \frac{10.000 \times 0,06 \times 4 + 5.000 \times 0,04 \times 3 + 8.000 \times 0,05 \times 5}{10.000 \times 0,06 + 5.000 \times 0,04 + 8.000 \times 0,05}$$

$$\bar{n} = \frac{2.400,00 + 600,00 + 2.000,00}{600,00 + 200,00 + 400,00}$$

$$\bar{n} = \frac{5.000,00}{1.200,00} = 4,1667$$

Resposta.: O prazo médio é de 4,1667 meses ou 4 meses e 5 dias.

Observação: Este prazo médio significa que, se os três títulos fossem descontados com um prazo único de 4 meses e 5 dias, produziriam o mesmo desconto que seria produzido caso estes títulos fossem descontados com os prazos de 4 meses, 3 meses e 5 meses, respectivamente.

Comprovação:

a) Valor do desconto calculado com base nos valores nominais, taxas e prazos especificados para cada título.

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = 10.000 \times 0,06 \times 4 = 2.400,00 \\ D_2 = 5.000 \times 0,04 \times 3 = 600,00 \\ D_3 = 8.000 \times 0,05 \times 5 = 2.000,00 \end{array}\right\} \Rightarrow D_c = \text{R\$ } 5.000,00$$

b) Valor do desconto calculado com base nos valores nominais e nas taxas especificados em cada título e, no prazo médio.

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = 10.000 \times 0,06 \times 4,166667 = 2.500,00 \\ D_2 = 5.000 \times 0,04 \times 4,166667 = 833,33 \\ D_3 = 8.000 \times 0,05 \times 4,166667 = 1.666,67 \end{array}\right\} \Rightarrow D_c = \text{R\$ } 5.000,00$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

01-Uma empresa desconta uma nota promissória no valor de R$ 9.000,00, 72 dias antes do vencimento, em um banco, a uma taxa de desconto comercial de 5% ao mês. Sabendo-se que a taxa de IOF cobrada é de 0,0041% ao dia e que o banco cobra uma taxa administrativa de 0,5% sobre o valor nominal do título para esse tipo de operação, determinar:

a)o valor do desconto;
b)o valor líquido recebido pela empresa;
c)a taxa efetiva de juros da operação no período.

Solução:

a) $D_c = Ndn$

$$D_c = 9.000 \times 0,05 \times \frac{72}{30} = 1.080,00$$

b) IOF = 9.000 × 0,000041 × 72 = 26,57

Desp. adm. = 9.000 × 0,005 = 45,00

Valor Líq. = 9.000,00 – 1.080 – 26,57 – 45,00 = 7.848,43

c) $i = \frac{S}{P} - 1 \Rightarrow i = \frac{9.000,00}{7.848,43} - 1 \Rightarrow i = 14,67\%$ em 72 dias.

02-Diante da alternativa de substituir os três títulos abaixo por um único, de valor igual à soma dos três. Pede-se determinar o prazo de vencimento do novo título (prazo médio), de modo que o seu desconto comercial seja igual à soma dos descontos comerciais dos outros três. Considerar a taxa de desconto de 2,5% a.m. para essa operação:

a) R$ 5.000,00, com vencimento em 60 dias
b) R$ 4.300,00, com vencimento em 45 dias
c) R$ 3.500,00, com vencimento em 20 dias

Solução:

Observação: Sendo a taxa constante, isto é, a mesma para todos os títulos, podemos ignorá-la para efeito de cálculo.

$$\bar{n} = \frac{5000 \times 60 + 4300 \times 45 + 3500 \times 20}{5000 + 4300 + 3500} = \frac{563500}{12800} = 44,0234$$ **Resposta: 44,0234 dias**

03-Considerando os títulos seguintes, determinar: a) a taxa média; b) o prazo médio.

VALOR NOMINAL	TAXA DE DESCONTO	PRAZO
R$ 15.000,00	6,0% a.m.	3 meses
R$ 10.000,00	6,5% a.m.	4 meses
R$ 18.000,00	4,5% a.m.	6 meses
R$ 12.000,00	5,4% a.m.	2 meses

Solução:

a) $$\bar{d} = \frac{15.000 \times 0,06 \times 3 + 10.000 \times 0,065 \times 4 + 18.000 \times 0,045 \times 6 + 12.000 \times 0,054 \times 2}{15.000 \times 3 + 10.000 \times 4 + 18.000 \times 6 + 12.000 \times 2}$$

$$\bar{d} = \frac{2.700 + 2.600 + 4.860 + 1.296}{45.000 + 40.000 + 108.000 + 24.000} = \frac{11.456}{217.000} = 0,052793 \text{ ou } 5,2793\% \text{ a.m.}$$

b) $$\bar{n} = \frac{15.000 \times 0,06 \times 3 + 10.000 \times 0,065 \times 4 + 18.000 \times 0,045 \times 6 + 12.000 \times 0,054 \times 2}{15.000 \times 0,06 + 10.000 \times 0,065 + 18.000 \times 0,045 + 12.000 \times 0,054}$$

$$\bar{n} = \frac{2.700 + 2.600 + 4.860 + 1.296}{900 + 650 + 810 + 648} = \frac{11.456}{3008} = 3,8085 \text{ meses ou 24 dias}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

01- Uma duplicata de valor nominal igual a R$ 1.800,00 é descontada 3 meses antes do vencimento, com taxa de desconto de 5% ao mês. Pede-se:

a) o desconto comercial do título; Resposta R$ 270,00.

b) o valor atual comercial do título; Resposta: R$ 1.530,00.

c) a taxa efetiva de juros simples da operação. Resposta: 5,88 % a.m.

02- Uma duplicata é descontada 50 dias antes do vencimento. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial é de 6% ao mês, que o valor nominal do título é R$ 40.000,00, que a taxa de IOF é de 1,5% a.a. e que a taxa de serviço cobrada pelo banco é de 0,5%, pede-se:

a) o desconto comercial do título; Resposta: R$ 4.000,00.
b) o valor líquido recebido pelo tomador; Resposta: R$ 35.716,67
c) a taxa efetiva de juros simples da operação. Resposta: 7,20% a.m.
d) a taxa de rentabilidade mensal da operação para o banco. Resposta: 7,04% a.m.

03- O desconto comercial de um título foi de R$ 150,00, adotando-se uma taxa de desconto de 30% ao ano. Quanto tempo faltaria para o vencimento do título se o seu valor nominal fosse de R$ 4.000,00? Resp.: 45 dias.

04- Determine o valor a ser pago hoje por um título de R$ 27.000,00, cujo vencimento ocorrerá daqui a quatro meses, supondo que a taxa de desconto comercial simples seja de 4,8% ao mês. Resposta:R$ 21.816,00.

05- Uma pessoa precisa de R$ 18.000,00 para saldar um compromisso. Que valor deverá pedir emprestado em um banco que cobra 4,5% ao mês de desconto comercial, mais uma taxa de serviço de 2% sobre o valor nominal do título, com prazo de 60 dias? Resposta: R$ 20.224,72.

06- Uma duplicata no valor de R$ 5.000,00 foi descontada em um banco, 45 dias antes do seu vencimento, à taxa de desconto comercial de 4,5% ao mês. Determinar o valor creditado ao cliente, sabendo-se que a taxa de IOF é de 1,5% ao ano. Resposta:R$ 4.653,13.

07- (QC-MM) Para pagar uma dívida de R$ 4.027,50, certo comerciante juntou um cheque ao portador de R$ 1.332,50 à importância líquida (valor atual) produzida pelo desconto comercial de uma letra de R$ 2.750,00, vencível em três meses. A que taxa anual foi calculado o desconto do referido título? Resposta.: 8% a.a.

08- Uma letra do Tesouro Nacional está sendo negociada com um prazo de 48 dias, com taxa de desconto comercial de 7% a.m. Calcule o valor da taxa de rentabilidade mensal do papel. Resposta: 7,88% a.m.

09- Foram aplicados, na mesma data, os seguintes valores, a juros simples: R$ 2.400,00, com taxa de 4,5% ao mês, em quatro meses; R$ 5.000,00, com taxa de 4% ao mês, em seis meses e R$ 3.500,00, com taxa de 5% ao mês, em três meses. Objetivando estabelecer um vencimento único para as três aplicações, calcular o prazo médio, ou seja, em quanto tempo esses valores colocados com suas respectivas taxas renderão o mesmo total de juros? Resposta: 4 meses e 14 dias, aproximadamente.

10- (TCI-RJ) Um título com 180 dias a decorrer até seu vencimento está sendo negociado, no regime de juros simples, com uma taxa de desconto comercial de 15% ao ano. Determine o valor da aplicação, que proporciona um resgate de R$ 2.000,00. Resposta: R$ 1.850,00.

JUROS COMPOSTOS

1-CÁLCULO DOS JUROS COMPOSTOS - FÓRMULAS E EXEMPLOS

1.1-Conceito

Diz-se que um capital está aplicado a juros compostos ou no regime de capitalização composta, quando, no fim de cada período financeiro, previamente estabelecido, os juros são adicionados ao capital anterior e passam a render juros no período seguinte.

1.2-Expressão para o cálculo do montante

O valor dos juros em cada período financeiro, no regime de juros compostos, é obtido pela aplicação da taxa de juros sobre o saldo existente no início do período correspondente. Assim, considerando-se o principal P aplicado a juros compostos à taxa i durante n períodos, segue-se que: o valor dos juros no fim do primeiro período é dado por:

$$j_1 = Pi$$

O valor do montante S no fim desse período será:

$$S_1 = P + Pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_1 = P\,(1 + i)}$$

No final do segundo período os juros acumulados serão representados por:

$$j_2 = S_1.i \text{ , isto é: } j_2 = P(1 + i)i$$

O montante no final do segundo período será, portanto, representado por:

$$S_2 = S_1 + j_2 \text{ , isto é: } S_2 = P(1 + i) + P(1 + i)i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_2 = (1 + i)^2.}$$

Por indução, podemos concluir que a expressão genérica para o cálculo do montante **S**, à taxa **i** de juros compostos, no fim do período **n** será representada por:

$$\boxed{\mathbf{S = P\,(1 + i)^n}}$$

A expressão acima mostra que, no regime de capitalização composta, o montante cresce de forma exponencial ao longo do tempo.

Para simplificar a avaliação numérica, o termo $\mathbf{(1 + i)^n}$ será denominado **FATOR DE CAPITALIZAÇÃO** e será representado por **FPS (i, n**).

Assim, podemos escrever: $\mathbf{FPS\,(\,i,\ n\,)\ =\ (\,1 + i\,)^{\,n}}$

E, como conseqüência imediata temos : $\boxed{\mathbf{S = P \times FPS\,(\,i,\ n\,)}}$

Observação: Os valores do fator de capitalização **FPS (i, n)** estão contidos nas tabelas financeiras.

1.3 - Expressão para o cálculo do valor atual

A expressão $S = P(1 + i\,)^{\,n}$ nos permite escrever:

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{\mathbf{S}}{(1+\mathbf{i})^{\mathbf{n}}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathbf{P = S\,(\,1 + i\,)^{\,-\,n}}}$$

A expressão acima permite determinar o principal **P**, que aplicado à taxa **i** de juros compostos, durante **n** períodos, produz o montante **S.**

O termo $\mathbf{(\,1 + i\,)^{\,-\,n}}$ é denominado **FATOR DE VALOR ATUAL** e, será representado por **FSP (i, n**), isto é, $\mathbf{FSP\,(\,i,\ n\,) = (\,1 + i\,)^{\,-\,n}}$

E, como conseqüência imediata temos : $\boxed{\mathbf{P = S \times FSP\,(\,i,\ n\,)}}$

Observação: Os valores do fator de valor atual **FSP (i, n)** estão contidos nas tabelas financeiras.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

01- Um investidor aplicou R$ 50.000,00 por 8 meses, à taxa de 6% ao mês, no regime de juros compostos. Calcular o montante ao fim desse prazo.

Solução:

P = R$ 50.000,00
i = 6% a.m.
n = 8 meses
S = ?

Utilizando a fórmula

$S = P(1+i)^n \Rightarrow S = 50.000 \times (1 + 0,06)^8 \Rightarrow S = R\$\ 79.692,40$

Utilizando a tabela financeira:

$S = P \times FPS\ (i, n)$

$S = 50.000 \times FPS\ (6\%, 8) \Rightarrow S = 50.000 \times 1,593848 \Rightarrow S = R\$\ 79.692,40$

02- Quanto se deve investir hoje, para produzir R$ 820.580,00 de montante, em 2 anos, no regime de capitalização composta, à taxa de 5,5% ao mês?

Solução:

S = R$ 820.580,0
i = 5,5% a.m.
n = 2 anos = 24 meses
P = ?

Utilizando a fórmula

$P = S\ (1 + i)^{-n} \Rightarrow P = 820.580\ (1 + 0,055)^{-24} \Rightarrow P = R\$\ 227.018,84$

Utilizando a tabela financeira:

$P = S \times FSP\ (i, n)$

$P = 820.580 \times FSP\ (5,5\%, 24) \Rightarrow P = 820.580 \times 0,276657 \Rightarrow P = R\$\ 227.019,20$

03- Você recebe uma proposta para investir hoje a importância de R$ 300.000,00 para receber R$ 440.798,42 ao fim de 5 meses. Qual a taxa de rentabilidade mensal desse investimento?

Solução:

P = R$ 300.000,00
S = R$ 440.798,42
n = 5 meses
i = ?

$S = P(1 + i)^n$

$440.798,42 = 300.000\ (1 + i)^5$

$(1 + i)^5 = \Rightarrow (1 + i)^5 = 1,469328 \Rightarrow\Rightarrow 1 + i = \sqrt[5]{1,469328} \Rightarrow i = 0,08$ ou $i = 8\%$ a.m.

04- Determinar o prazo de uma aplicação de R$ 50.000,00, no regime de capitalização composta, à taxa de 7% ao mês, cujo resgate foi de R$ 65.539,80.

Solução:

P = R$ 50.000,00
S = R$ 65.539,80
i = 7% a.m.

n = ?

Utilizando a fórmula

$S = P(1 + i)^n$

$$65.539{,}80 = 50.000\,(1 + 0{,}07)^n \Rightarrow (1{,}07)^n = \frac{65.539{,}80}{50.000} \Rightarrow (1{,}07)^n = 1{,}310796$$

$$\log(1{,}07)^n = \log 1{,}310796 \Rightarrow n \times \log 1{,}07 = \log 1{,}310796 \Rightarrow n = \frac{0{,}117535}{0{,}029384} \Rightarrow n = 4 \text{ meses}$$

Utilizando a tabela financeira:

$S = P \times FPS\,(i,\ n)$

$$65.539{,}80 = 50.000 \times FPS\,(7\%,\ n) \Rightarrow FPS\,(7\%,\ n) = \frac{0{,}117535}{0{,}029384} = 1{,}310796$$

05- Durante quanto tempo ficou aplicado o capital de R$ 10.000,00, à taxa de 2% a.m., no regime de juros compostos, se ao fim desse prazo o montante resgatado foi de R$ 10.247,24?

Solução:

P = R$10.000,00
S = R$10.247,24
i = 2% a.m.
n = ?

$$S = P(1 + i)^n \Rightarrow (1 + i)^n = \frac{S}{P}$$

$$\log(1 + i)^n = \log\frac{S}{P} \Rightarrow n \cdot \log(1 + i) = \log\frac{S}{P} \quad \text{ou} \quad \boxed{n = \frac{\log\frac{S}{P}}{\log(1+i)}}$$

$$\text{Logo, } n = \frac{\log\frac{10.247{,}24}{10.000}}{\log(1+0{,}02)} = \frac{\log 1{,}024724}{\log 1{,}02} = \frac{0{,}010607}{0{,}008600} = 1{,}233361 \text{ meses} = 37 \text{ dias}$$

1.4- Aplicações Com Períodos Fracionários

No regime de capitalização composta, quando o período é fracionário podem ser usadas duas convenções:

1.4.1-Convenção Exponencial

Neste caso, remunera-se a aplicação, com juros compostos, durante todo o período (inteiro + fração). O montante cresce segundo uma curva exponencial.

Exemplo: O capital de R$ 12.000,00 foi aplicado a juros compostos, à taxa de 60% ao ano, capitalizada trimestralmente, pelo prazo de 8 meses. Determine o montante.

Solução:

P = R$ 12.000,00

i = 60% a.a., capitalizados trimestralmente = 15% a.t.

$n = 8 \text{ meses} = \frac{8}{3} \text{ trimestres} = 2{,}666667 \text{ trimestres}$

S = ?

$S = P(1 + i)^n$

$$S = 12.000\,(1 + 0{,}15)^{2{,}666667} \Rightarrow S = 12.000 \times 1{,}451647 \Rightarrow S = R\$\ 17.419{,}76$$

1.4.2- Convenção linear

Neste caso, a parte inteira do período é remunerada a juros compostos. O montante assim obtido é, então, remunerado a juros simples, no período correspondente à parte fracionária.

Exemplo: O capital de R$ 12.000,00 foi aplicado a juros compostos à taxa de 60% ao ano, capitalizada trimestralmente, durante 8 meses. Determine o montante.

Solução:

P = R$ 12.000,00

i = 60% a.a., capitalizados trimestralmente = 15% a.t.

n = 8 meses = $\frac{8}{3}$ trimestres = 2,666667 trimestres

S = ?

$$S = P\,(1 + i)^{n} \times \left(1 + i \times \frac{p}{q}\right)$$

$$S = 12.000\,(1 + 0{,}15)^{2} \times (1 + 0{,}15 \times 0{,}666667) \quad \Rightarrow \quad S = R\$\ 17.457{,}00$$

Observação: O montante obtido através da convenção linear é sempre um pouquinho maior que o montante obtido pela convenção exponencial

1.5- Taxas Equivalentes:

Duas ou mais taxas são ditas equivalentes quando, ao serem aplicadas a um mesmo principal durante um mesmo prazo, produzem um mesmo montante acumulado no final desse prazo, no regime de juros compostos.

O conceito de taxas equivalentes está, portanto, diretamente ligado ao regime de juros compostos.

Exemplo: Sejam as taxas de juros compostos de 69,58814 % ao ano e 4,5 % ao mês. Considerando-se uma aplicação de R$ 5.000,00 pelo prazo de dois anos, no regime de juros compostos, temos:

a) $S = 5.000\,(1 + 0{,}6958814)^{2} = 14.380{,}07$

b) $S = 5.000\,(1 + 0{,}045)^{24} = 14.380{,}07$

Logo, no regime de capitalização composta, 69,58814 % a.a. e 4,5 % a.m. são taxas equivalentes.

1.5-1- Relações entre as taxas equivalentes

Por definição de taxas equivalentes, temos:

$$S = P(1 + i_a)^{1} = P(1 + i_s)^{2} = P(1 + i_t)^{4} = P(1 + i_m)^{12} = P(1 + i_d)^{360}$$

Onde, simplificando as igualdades,teremos:

$$\boxed{\mathbf{(1 + i_a)^{1} = (1 + i_s)^{2} = (1 + i_t)^{4} = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{360}}}$$

Aplicações:

1º) Determine a taxa anual equivalente a 8% ao mês, no regime de juros compostos.

Solução

$$(1 + i_a)^{1} = (1 + i_m)^{12}$$

$$(1 + i_a)^{1} = (1 + 0{,}08)^{12} \quad \Rightarrow \quad i_a = 151{,}817\%\ \text{a.a.}$$

Observação: Para facilitar os cálculos, devemos utilizar a taxa correspondente ao maior prazo, no primeiro membro da igualdade.

2º) Determine a taxa mensal equivalente a 48% a.a., no regime de juros compostos.

Solução:

$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12}$

$(1 + i_m)^{12} = 1 + 0{,}48 \Rightarrow 1 + i_m = \sqrt[12]{1{,}48} \Rightarrow 1 + i_m = 1{,}0332097 \Rightarrow i = 3{,}3210\%$ a.m.

3º) Dada a taxa de 8% em 45 dias, calcule a taxa equivalente para 72 dias, no regime de juros compostos.

Solução:

$i_{45} = 8\%$
$i_{72} = ?$
$n_1 = 45$ dias
$n_2 = 72$ dias

$(1 + i_{72})^1 = (1 + i_{45})^{72/45}$

$(1 + i_{72})^1 = (1 + 0{,}08)^{72/45} \Rightarrow 1 + i_{72} = 1{,}131040 \Rightarrow i_{72} = 0{,}131040$ ou $i_{72} = 13{,}1040\%$

1.6- CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA COM TAXAS DE JUROS VARIÁVEIS

Seja calcular o montante de uma aplicação de R$ 8.000,00 à taxa 8% ao mês, pelo prazo de um ano, no regime de juros compostos.

Solução:

$S = 8.000(1 + 0{,}08)^{12} = 20.145{,}36$

No problema acima, supomos uma taxa constante de 8% ao mês ao longo dos 12 meses do ano. Contudo, é fácil determinar o montante quando a taxa de juros varia em cada período.

Seja calcular o montante de um capital **P**, aplicado a juros compostos, com as seguintes taxas por período de capitalização:

i_1 no 1º período
i_2 no 2º período
i_3 no 3º período

e, assim, sucessivamente, até o período n.

$S_1 = P(1 + i_1)$

$S_2 = S_1(1 + i_2) = P(1 + i_1)(1 + i_2)$

$S_3 = S_2(1 + i_3) = P(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)$
……………………………………………..
……………………………………………..
……………………………………………..

$S_n = S_{n-1}(1 + i_n) = P(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \dots (1 + i_{n-1})(1 + i_n)$

Assim, ao final de n períodos de capitalização, teremos:

$$\boxed{S = P\times (1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3) \times \dots\times (1 + i_{n-1})(1 + i_n)}$$

1.7- Cálculo da Taxa Acumulada e da Taxa Média

A taxa acumulada no período é dada pela expressão: $i = \frac{S}{P} - 1$, isto é:

$$\boxed{i = [(1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3) \times\dots \times (1 + i_n) - 1] \times 100}$$

A taxa média é calculada com a relação de equivalência, isto é:

$$\boxed{i_m = [(1 + i_t)^{1/n} - 1] \times 100}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

01- Seja, por exemplo, calcular o montante resultante da aplicação do capital de R$ 18.000,00 que esteve aplicado durante 3 meses, no regime de juros compostos, às taxas de 3,45%, 2,28% e 4,32%, respectivamente.

Solução:

$S = 18.000(1 + 0{,}0345) \times (1 + 0{,}0228) \times (1 + 0{,}0432)$

$S = 18.000 \times 1{,}0345 \times 1{,}0228 \times 1{,}0432 \quad \Rightarrow$ **S = R$ 19.868,33**

02- Em quatro meses sucessivos um fundo de investimentos rendeu 1,6%, 1,8%, 1,5% e 2%, respectivamente. Qual a taxa de rentabilidade acumulada no período? Qual a taxa média mensal de rendimento do fundo?

Solução:

a) $i_{AC} = (1 + 0{,}016)(1 + 0{,}018)(1+ 0{,}015)(1 + 0{,}02) – 1$

$i_{AC} = 0{,}070798$ ou $\mathbf{i_{AC} = 7{,}0798\%}$

b) $i_m = [(1 + 0{,}070798)^{1/4} – 1] \times 100 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i_m = 1{,}7248\%}$ **a.m.**

03- O capital de R$ 5.000,00 esteve aplicado durante dois meses e quinze dias a juros compostos de 2% a.m. Calcular o montante:

b. utilizando a convenção exponencial;
c. utilizando a convenção linear

Solução:

P = R$ 5.000,00
I = 2% a.m.
n = 2 meses e 15 dias = 75 dias

a) $S = 5.000(1 + 0{,}02)^{75/30} \quad \Rightarrow \quad S = 5.000 \times 1{,}02^{2,5} \quad \Rightarrow \quad S = 5.000 \times 1{,}050752 \quad \Rightarrow$ **S = R$ 5.253,76**

b) $S = 5.000(1 + 0{,}02)^2 \times (1 + 0{,}02 \times 0{,}5) \quad \Rightarrow \quad S = 5.000 \times 1{,}040400 \times 1{,}01 \quad \Rightarrow$ **S = R$ 5.254,02**

04- Em janeiro, fevereiro, março e abril de certo ano, o preço de um produto teve respectivamente os seguintes aumentos: 2%, 5%, 3,6% e 7%.

a) Qual a taxa acumulada no quadrimestre?
b) Qual a taxa média mensal de aumento do produto?

Solução:

a) $i = [(1 + 0{,}02)(1 + 0{,}05)(1 + 0{,}036)(1 + 0{,}07) – 1] \times 100 \quad \Rightarrow$ **i = 18,7225% no quadrimestre**

b) $i_m = [(1 + 0{,}187225)^{1/4} – 1] \times 100 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i_m = 4{,}3838\%}$ **a.m.**

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

01- Determinar o montante que um investimento de R$ 80.000,00 produzirá em dois semestres, à taxa de 15% ao trimestre, no regime de capitalização composta. Resposta : R$ 139.920,50

02- Você vai adquirir dois títulos, o primeiro tem valor de resgate de R$ 50.000,00 e prazo de resgate 6 meses; o segundo tem valor de resgate de R$ 30.000,00 e prazo de resgate de 9 meses. Qual o valor da aplicação, se a instituição financeira está oferecendo uma taxa de 6% ao mês, no regime de juros compostos? Resposta: R$ 53.004,98

03- Quantos períodos serão necessários para triplicar um capital, a juros compostos, à taxa de 10% ao período? Resposta: 11,53.

04- Qual a taxa mensal de juros compostos que transforma um capital de R$ 30.000,00 em R$ 212.537,21 em dois anos? Resposta: 8,5% a.m.

05- O capital de R$ 100.000,00 colocado a juros compostos, capitalizados mensalmente durante 8 meses, elevou-se, no final desse prazo, a R$ 156.994,83. Calcular a taxa de juros aplicada. Resposta: 5,8% a.m.

06- Determinar o prazo necessário para que uma aplicação no valor de R$ 20.000,00 se transforme em R$ 35.246,83, à taxa de 12% ao mês, no regime de juros compostos. Resposta: 5 meses.

07- Ricardo fez uma aplicação de R$ 15.000,00 por 15 meses à taxa de 45% a.a., no regime de juros compostos. Determine o montante recebido, utilizando as convenções linear e exponencial. Resposta: R$ 24.196,88 pela convenção linear; R$ 23.867,19 pela convenção exponencial.

08- O rendimento das cadernetas de poupança atingiu no período de abril a agosto de 1989 os seguintes percentuais: Abril 11,52%; Maio 10,48%; Junho 29,40%; Julho 25,45%; Agosto 29,99%.

a) Determine o percentual de rendimento acumulado nesse período nas cadernetas de poupança.
Resposta: 159,9868%.

b) Determine a taxa média mensal de rendimento das cadernetas de popança nesse período.
Resposta: 21,06% a.m.

09- Em quatro meses sucessivos um fundo de renda fixa rendeu 1,2%, 1,4%, 1,5% e 1,6%. Qual a taxa de rentabilidade acumulada deste fundo no período? Resposta.: 5,8225%.

2- ESTUDO DAS TAXAS

2.1- Taxa Efetiva

Taxa efetiva é aquela em que a unidade de referência coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.

Exemplos:

a) 4 % ao mês capitalizados mensalmente;
b) 10 % ao trimestre capitalizados trimestralmente.

Em geral, omite-se o período de capitalização. Em vez de 15% a.a., capitalizados anualmente, diz-se, apenas, 15 % ao ano.

2.2- Taxa Nominal

Taxa nominal é aquela em que a unidade de tempo de referência não coincide com a unidade de tempo do período de capitalização. A taxa nominal, apesar de bastante utilizada, não representa uma taxa efetiva. O que se deve buscar é a taxa efetiva contida na taxa nominal.

Eemplos:

1º) 60% a.a., capitalizados mensalmente, representa uma taxa efetiva de 5% a.m.

2º) 50% a.a.,capitalizados semestralmente, representa uma taxa efetiva de 25% a.s.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01- Determinar a taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 192% a.a., capitalizada mensalmente?

Solução:

Taxa efetiva mensal = 192% ÷ 12 = 16% a.m.

$(1 + i_a)^1 = (1 + 0{,}16)^{12}$

$1 + i_a = 5{,}936027 \Rightarrow i_a = 4{,}936027 \Rightarrow$ $\mathbf{i_a = 493{,}6027\%}$ **a.a.**

02- Determinar a taxa anual com capitalizações mensais que é equivalente à taxa efetiva de 493,6027% a.a.

Solução:

Primeiramente, deve-se calcular a taxa efetiva do período de capitalização, isto é, a taxa mensal.

$(1 + 4{,}936027) = (1 + i_m)^{12} \Rightarrow 1 + i_m = \sqrt[12]{5{,}936027} \Rightarrow 1 + i_m = 1{,}16 \Rightarrow i_m = 0{,}16$ ou 16% a.m.

A seguir, multiplica-se a taxa do período de capitalização pelo número de períodos, isto é:

$I_a = 16\% \times 12 = 192\%$

Resposta: A taxa nominal é 192% ao ano com capitalizações mensais.

03- Qual o montante que você terá dentro de 2 anos se aplicar R$ 10.000,00 à taxa de 72% a.a., capitalizada trimestralmente?

Solução:

P = R$ 10.000,00

$i = \dfrac{72\%}{4} = 18\%$ a.t.

n = 2 anos = 8 trimestres

S = ?

$S = P(1+ i)^n \Rightarrow S = 10.000\,(1 + 0{,}18)^8 \Rightarrow$ **S = R$ 37.588,59**

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01- Obter a taxa de juros anual equivalente à taxa mensal de 5%, no regime de juros compostos, com aproximação de duas casas decimais. Resposta: 79,59% a.a.

02- Qual a taxa efetiva anual, com aproximação de duas casas decimais, de um financiamento à taxa nominal de 36% ao ano com capitalização mensal? Resposta: 42,58% a.a.

03- Qual a taxa de juros anual equivalente à taxa de juros nominal de 8% ao ano com capitalização semestral? Resposta: 8,16% a.a.

04- Qual a taxa de juros trimestral equivalente à taxa de juros nominal de 40% ao bimestre, com capitalização mensal? Resposta: 72,80% ao trimestre.

05- (ATE-MS) Um capital é aplicado à taxa de juros nominal de 24% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa de juros anual efetiva da aplicação desse capital, com aproximação de duas casas decimais? Resposta: 26,82% ao ano.

06- (SUSEP) Um capital é aplicado à taxa de juros nominais de 24% ao ano com capitalização mensal, durante dezoito meses. Calcule o juro obtido ao final do prazo como porcentagem do capital inicial. Resposta: 42,82%.

07- Qual a taxa nominal ao ano, capitalizada trimestralmente, que equivale à taxa efetiva de 21,55% ao ano? Resposta: 20% a.a.

08- Qual a taxa nominal ao ano, capitalizada bimestralmente, que é equivalente à taxa nominal de 31,5% ao semestre, capitalizada quadrimestralmente? Resposta: 60%.

09- Um banco concede empréstimos pessoais, cobrando juros compostos à taxa de 54% ao semestre, com capitalização trimestral. Qual o montante a ser pago por um empréstimo de R$ 30.000,00 pelo prazo de 6 meses? Resposta: R$ 48.387,00.

10-Um capital aplicado a juros compostos, à taxa nominal de 36% ao ano, com capitalização mensal, atingiu um montante de R$ 10.900,00, ao fim de um trimestre. Determinar o valor desse capital.Resposta: R$ 9.975,04.

11- (AG.FISCAL – P.ALEGRE) O montante de R$ 34.040,00 foi obtido através do resgate de um capital inicial de R$ 20.000,00, aplicado a uma taxa nominal de 12% ao ano, capitalizada trimestralmente. Qual o período da aplicação? Resposta: 4 anos e 6 meses.

12- (ACE) O capital de R$ 50.000,00, aplicado a juros compostos com capitalização trimestral, produziu o montante de R$ 60.775,31 ao fim de um ano. Calcular a taxa de juros nominal anual, com aproximação de uma casa decimal. Resposta: 20,0%.

13- Determine o montante da aplicação de R$ 47.000,00, no fim de um ano, com juros compostos de 48% a.a., capitalizados semestralmente. Resposta: R$ 72.267,20.

14- Qual o valor dos juros pagos, no caso do empréstimo de R$ 26.000,00 à taxa de 21% ao semestre, capitalizada bimestralmente, pelo prazo de 10 meses, no regime de juros compostos? Resposta: R$ 10.466,34.

15- Certo capital foi colocado a juros compostos à taxa de 32% a.a., capitalizada trimestralmente, durante 3 anos. Sabendo que rendeu a importância de R$ 4.617,00 de juros, calcule o montante. Resposta: R$ 7.658,16.

16-(TCI) Uma pessoa aplicou um capital de R$ 20.000,00 durante quatro anos à taxa nominal de 14% ao ano, capitalizada semestralmente. Ao término desse período, somente os juros ganhos foram reaplicados por 15 meses à taxa nominal de 12% ao ano, capitalizada mensalmente. Qual foi o rendimento dessa última aplicação? Resposta: R$ 2.312,14.

17- Uma pessoa deposita R$ 12.600,00 em um banco por 3 anos, a 22% a.a. Calcular o montante sabendo que no primeiro ano os juros são capitalizados semestralmente, no segundo ano trimestralmente e, no terceiro ano, bimestralmente. Resposta: R$ 23.870,48

18- Uma pessoa aplica hoje R$ 16.000,00 e R$ 14.000,00 cinco meses mais tarde. Qual será o montante total, um ano após a primeira aplicação? Considere taxa de juros de 5% ao mês, no regime de juros compostos. Resposta: R$ 48.433,11.

19- (ESAF) Uma pessoa aplicou 60% de seu capital na Financeira "X", a 16%a.a., com capitalização trimestral. O restante aplicou na Financeira "Y", a 18% a.a., com capitalização semestral. Depois de três anos recebeu R$ 20.177,58 de juros compostos da Financeira "Y". Nessas condições, o valor dos juros que recebeu a Financeira "X" foi de (desprezar os centavos no resultado final).

a) R$ 48.159,00 b) R$ 75.400,00 c) R$ 26.866,00 d) R$ 49.978,00 e) R$ 71.556,00

20- (CONTADOR-RJ) Um capital foi inicialmente aplicado por dois anos à taxa nominal de 24% ao ano com capitalização trimestral. Terminado esse prazo, o rendimento da aplicação foi aplicado por três anos à taxa nominal de 12% ao ano com capitalização semestral. Se o rendimento dessa segunda aplicação foi de R$ 2.485,38, qual o capital inicial aplicado? (despreze os centavos).

a) R$ 9.000,00 b) R$ 10.000,00 c) R$ 11.000,00 d) R$ 12.000,00 d) R$ 13.000,00

21- Um investidor aplicou 20% de seu capital à taxa de juros compostos de 36% a.a., capitalizada trimestralmente e o restante a 45% a.a., capitalizada semestralmente. Ao final de um ano retirou o montante de R$ 59.312,64. Calcule o capital aplicado. Resposta: R$ 40.000,00.

22- Qual o montante de uma aplicação de R$ 10.000,00 à taxa de 84% a.a., capitalizada trimestralmente, no fim de um ano e cinco meses, no regime de capitalização composta ? Calcule pela convenção linear e exponencial. Resposta: R$ 29.568,66 pela convenção linear; R$ 29.452,16 pela convenção exponencial.

23- (AFTN) Uma pessoa aplicou R$ 10.000,00 a juros compostos de 15% a.a. pelo prazo de três anos e oito meses. Admitindo-se a convenção linear, o montante da aplicação ao final do prazo era de: (despreze os centavos).

a) R$ 16.590,00 b) 16.602,00 c) 16.698,00 d) R$ 16.705,00 e) R$ 16.730,00

24-FTE-PA) Um capital é aplicado a juros compostos durante dois períodos e meio a uma taxa de 20% ao período. Calcule o montante em relação ao capital inicial, considerando a convenção linear para o cálculo do montante.

a) 150% b) 157,74% c) 158,4% d) 160% e) 162%

25- Em um empréstimo a juros compostos de R$ 100.000,00, a taxa foi de 2% a.m. e prazo de 90 dias. No entanto, havia uma cláusula contratual estabelecendo a convenção linear para o fato de o pagamento ser feito com atraso. Se o pagamento foi feito com um atraso de 17 dias, qual o valor do montante? Resposta: R$ 107.323,50

3- Inflação, Deflação e Atualização Monetária

3.1-Introdução

"A inflação e a deflação são duas condições econômicas que afetam o valor do dinheiro de uma nação. Um período inflacionário é uma época de preços em elevação, enquanto que um período de deflação é uma época de preços em declínio".

A inflação pode ser entendida como uma elevação generalizada e permanente dos níveis de preços do sistema econômico, resultando em deterioração do poder aquisitivo da moeda e depreciação dos valores dos ativos. A complexidade do cálculo da inflação decorre da necessidade de aferir a variação de preços de produtos distintos fisicamente, e de serviços, que variam a taxas diferenciadas.

Para o cumprimento dessa tarefa, existem diversos índices de preços que procuram medir a inflação em toda a cadeia de produção e de comercialização, ou em partes relevantes da mesma. Daí a existência de índices gerais, no atacado (indústria e agricultura), no varejo (consumidores) e na construção (insumos e materiais de construção).

O cálculo da inflação é efetuado por meio de uma média da variação dos preços pesquisados para os diferentes produtos, ponderada pelas quantidades produzidas, consumidas ou comercializadas dos bens, a partir de parâmetros primários obtidos das pesquisas de orçamentos familiares e até de matrizes de relações inter-setoriais.

Os índices de preços mais importantes do país são aqueles produzidos pela Fundação Getúlio Vargas (FGV), pelo IBGE e pela Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas da Universidade de São Paulo (FIPE-USP).

3.2- Índices de Preços

Índices de preços são números que agregam e representam os preços de uma determinada cesta de produtos. Sua variação mede, portanto, a variação média dos preços dos produtos da cesta. Podem se referir a, por exemplo, preços ao consumidor, preços ao produtor, custos de produção ou preços de exportação e importação.

A concepção dos índices varia de conformidade com a abrangência geográfica da pesquisa, com o universo dos consumidores (classe de renda), com o período a que se refere, além de outros fatores específicos para cada índice.

3.3- Por que existem tantos índices de preços no Brasil?

O longo período de convivência com inflação no Brasil fez com que se criassem diversos índices agregados de preços para medi-la, bem como mecanismos de atualização monetária, que funcionavam como repositores do poder aquisitivo da moeda, perdido no período anterior.

Os índices de preços foram construídos ao longo do tempo com diferentes finalidades. O **IPC-Fipe**, por exemplo, foi criado pela Prefeitura do Município de São Paulo com o objetivo de reajustar os salários dos servidores municipais. O **IGP-M** foi criado para ser usado no reajuste de operações financeiras, especialmente as de longo prazo, e o **IGP-DI** para balizar o comportamento dos preços em geral da economia. O **INPC** é o índice balizador dos reajustes de salários, enquanto o **IPCA** corrige os balanços e demonstrações financeiras trimestrais e semestrais das companhias abertas, além de ser o medidor oficial da inflação no país. Apesar dessa variedade, os índices calculados no país se classificam em três grupos principais: os índices de preços ao consumidor de cobertura nacional apurados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE)(www.ibge.gov.br); os índices gerais de preços apurados pelo Instituto Brasileiro de Economia da Fundação Getúlio Vargas (FGV)(http://www.fgv.br); e os índices de preços ao consumidor de São Paulo, apurado pela Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas (http://www.fipe.com.br).

3.4-Principais Índices Agregados de Preços no Brasil

IGP: Índice Geral de Preços, calculado pela Fundação Getúlio Vargas. É uma média ponderada do índice de preços no atacado (IPA), com peso 6; de preços ao consumidor (IPC) no Rio e SP, com peso 3; e do custo da construção civil (INCC), com peso 1. Usado em contratos de prazo mais longo, como aluguel.

IGP-DI: O Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna, da FGV, reflete as variações de preços de todo o mês de referência. Ou seja, do dia 1 ao 30 de cada mês. Ele é formado pelo IPA (Índice de Preços por Atacado), IPC (Índice de Preços ao Consumidor) e INCC (Índice Nacional do Custo da Construção), com pesos de 60%, 30% e 10%, respectivamente. O indicador apura as variações de preços de matérias-primas agrícolas e industriais no atacado e de bens e serviços finais no consumo.

IGP-M: Índice Geral de Preços do Mercado, também da FGV. Metodologia igual à do IGP-DI, mas pesquisado entre os dias 21 de um mês e 20 do seguinte. O IGP tradicional abrange o mês fechado. O IGP-M é elaborado para contratos do mercado financeiro

IGP-10: Índice Geral de Preços 10, também da FGV e elaborado com a mesma metodologia do IGP e do IGP-M. A única diferença é o período de coleta de preços: entre o dia 11 de um mês e o dia 10 do mês seguinte

IPC-RJ: Considera a variação dos preços na cidade do Rio de Janeiro. É calculado mensalmente pela FGV (Fundação Getúlio Vargas) e toma por base os gastos de famílias com renda de um a 33 salários mínimos IPCA.

IPC-Fipe: Índice de Preços ao Consumidor da Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas, da USP, pesquisado no município de São Paulo. Reflete o custo de vida de famílias com renda de 1 a 20 salários mínimos. Divulga também taxas quadrissemanais.

ICV-Dieese: Índice do Custo de Vida do Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos, também medido na cidade de São Paulo. Reflete o custo de vida de famílias com renda média de R$ 2.800 (há também índices para a baixa renda e a intermediária)

INPC: Índice Nacional de Preços ao Consumidor, média do custo de vida nas 11 principais regiões metropolitanas do país para famílias com renda de 1 até 8 salários mínimos, medido pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística)

IPCA: Índice de Preços ao Consumidor Amplo, também do IBGE, calculado desde 1980, semelhante ao INPC, porém refletindo o custo de vida para famílias com renda mensal de 1 a 40 salários mínimos. A pesquisa é feita nas mesmas 11 regiões metropolitanas. Foi escolhido como alvo das metas de inflação ("inflation targeting") no Brasil

INCC: Índice Nacional do Custo da Construção, um dos componentes das três versões do IGP, o de menor peso. Reflete o ritmo dos preços de materiais de construção e da mão-de-obra no setor. Utilizado em financiamento direto de construtoras/incorporadoras

3.5-Variação dos Índices

A variação ou correção de um determinado período é dada pela variação percentual entre o índice no final do período indicado e o índice no final do período anterior, ou seja:

$$\mathbf{C} = \frac{\textbf{índice período indicado}}{\textbf{índice período anterior}} - 1$$

Quando temos os índices de correção de vários períodos, procedemos da forma seguinte:

$$\mathbf{C_a = (1 + c_1) \times (1 + c_2) \times (1 + c_3) \times \dots \times (1 + c_n) - 1}$$

A taxa média de inflação ou de atualização monetária é dada por:

$$\mathbf{C_m = [(1 + i_a)^{1/n} - 1] \times 100}$$

Exemplo:

Considerando os dados de inflação da tabela abaixo, calcule a correção do semestre e a taxa média mensal de inflação.

PERÍODO	MENSAL	ÍNDICE
Dezembro		100,00
Janeiro	15,50%	115,50
Fevereiro	17,00%	135,14
Março	12,00%	151,35
Abril	15,00%	174,05
Maio	20,00%	208,86
Junho	22,55%	255,96

Solução:

Fazendo-se o cálculo pela comparação dos índices acumulados teremos:

$$C = \frac{255{,}96}{100{,}00} - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1{,}5596 \quad \text{ou} \quad \mathbf{C = 155{,}96\%\ no\ semestre}$$

$$C_m = [(1 + 1{,}5596)^{1/6} - 1] \times 100 \;\Rightarrow\; \mathbf{C_m = 16{,}96\%\ a.m.}$$

Nota: É importante notar que a variação porcentual do índice de um mês em relação ao do mês anterior é igual à taxa de inflação do mês. Assim, por exemplo, a inflação do mês de fevereiro, na tabela anterior, poderia ser calculada por:

$$C = [\frac{135{,}14}{115{,}50} - 1] \times 100 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C = 0{,}1700 \times 100 = 17{,}00\%}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01- Considere que no mês base o preço médio de uma cesta básica seja R$ 200,00, e nos meses subseqüentes seja R$ 210,00, R$ 220,00 e R$ 240,00. Obtenha as taxas de inflação de cada mês, em relação ao mês anterior, e os respectivos índices. **Respostas: 5%, 4,76% e 9,09% e 1,05, 1,10 e 1,20**

02- Qual a taxa média mensal de inflação que deverá vigorar em cada um dos próximos 12 meses, de modo que a taxa acumulada no período seja 18% ? **Resposta: 1,39%**

03- A tabela abaixo contém os valores mensais do IGP-M de dezembro de 1998 a dezembro de 1999, sendo o mês base agosto de 1994.

Mês	IGP-M
Dezembro/1998	148,291
Janeiro/1999	149,533
Fevereiro/1999	154,933
Março/1999	159,325
Abril/1999	160,459
Maio/1999	159,996
Junho/1999	160,573
Julho/1999	163,060
Agosto/1999	165,603
Setembro/1999	167,997
Outubro/1999	170,861
Novembro/1999	174,939
Dezembro/1999	178,099

Com base nos dados da tabela, calcule:

a) a taxa de inflação de outubro de 1999; **Resposta: 1,70%**
b) a taxa de inflação de dezembro de 1999; **Resposta: 1,81%**
c) a taxa de inflação acumulada no primeiro semestre de 1999; **Resposta: 8,28%**
d) a taxa de inflação acumulada em 1999. **Resposta: 20,10%**

4- TAXA DE JUROS APARENTE E TAXA DE JUROS REAL

4-1- Introdução

Quando ocorre o aumento persistente dos preços de bens e serviços, a moeda perde o seu poder aquisitivo ao longo do tempo gerando um fenômeno conhecido como inflação.

A inflação ocorre devido a vários fatores, como por exemplo, a escassez de produtos, o déficit orçamentário do governo com emissão descontrolado de dinheiro, o desequilíbrio da balança de pagamentos, etc.

Em época de inflação elevada é fundamental a análise dos efeitos das taxas de inflação nos resultados das aplicações financeiras, pois a perda rápida do poder aquisitivo da moeda pode fazer com que estas aplicações produzam resultados meramente ilusórios.

Entende-se por taxa aparente aquela que vigora nas operações correntes. A taxa aparente, portanto, é a taxa total paga ou recebida numa operação financeira. Em períodos inflacionários, devemos distinguir, na taxa aparente, uma parte relativa à correção e outra relativa aos juros reais pagos ou recebidos. A taxa real é calculada depois de expurgados os efeitos inflacionários.

4.2- Fórmula da taxa real de juros

Seja: i = taxa aparente
c = taxa de inflação
r = taxa real de juros

Conforme já vimos anteriormente, se um capital **P** é aplicado durante um certo período de tempo **n** à taxa **i** por período, o montante, ao fim desse prazo é dado por: **S = P(1 + i).**

Se, no mesmo período, tivermos uma taxa **c** de inflação, o capital **P**, corrigido monetariamente pela inflação, será:

$$S' = P + c \cdot P = P(1 + c)$$

Chamamos de ganho real a diferença (**S – S'**), que poderá ser positiva, nula ou negativa (que neste caso se denomina perda real).

O montante com correção e juros será dado por:

$$S = S'(1 + r) \quad \text{ou} \quad P(1 + i) = P(1 + c) \times (1 + r)$$

Simplificando esta última expressão, teremos:

$$(1 + i) = (1 + c) \times (1 + r)$$

Donde se conclui que:

$$\boxed{\mathbf{i = (1 + c) \times (1 + r) - 1}} \qquad \boxed{\mathbf{c = \frac{1+i}{1+r} - 1}} \qquad \boxed{\mathbf{r = \frac{1+i}{1+c} - 1}}$$

Exemplos:

1º) Um capital foi aplicado, por um ano, à taxa de juros compostos de 18% a.a.. No mesmo período a taxa de inflação foi de 12,5%. Qual a taxa real de juros?

Solução:

i = 18% a.a.

c = 12,5% a.a.

Logo, $r = \dfrac{1+0{,}18}{1+0{,}125} - 1 \Rightarrow$ **r = 0,0489 = 4,89% a.a.**

2º) Um capital foi aplicado, por um ano, à taxa de juros compostos de 15% a.a. Neste mesmo período, a taxa de inflação foi de 18%. Qual a taxa real da aplicação?

Solução:

$i = 15\%$ a.a.

$c = 18\%$ a.a.

Logo: $r = \dfrac{1,15}{1,18} - 1 \Rightarrow r = -0,0254 = -2,54\%$ a.a.

Portanto, a aplicação teve uma perda real de 2,54% a.a.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

01- (F.R.-MS) A taxa de inflação acumulada em 1999 medida pelo IGP-M foi de 20,10%. Um investidor afirma ter auferido, em uma aplicação financeira, um rendimento real de 12% ao longo de 1999, usando o IGP-M como índice de inflação. Sua taxa efetiva de juros auferida em 1999 foi de aproximadamente:

a) 34,5% b) 33,8% c) 33,1% d) 32,1%

02- (METRÔ-RJ) Um capital foi aplicado por dois meses à taxa composta efetiva de 50% a.m. Nestes dois meses a inflação foi de 40% no primeiro e de 50% no segundo. Pode-se concluir que a taxa real de juros neste bimestre foi de, aproximadamente:

a) 7,1% b) 8,1% c) 9,1% d) 10,1%

03- (ICMS-SP) Considerando-se uma taxa de inflação mensal de 0,8%, para que a taxa real no mês seja de 1%, o valor assumido pela taxa efetiva, na capitalização composta, é:

a) 1,81% b) 1,20% c)1,46% d) 0,20% e) 2,80%

04- Um investidor aplicou R$ 8.000,00 numa letra de câmbio resgatando-a, um mês mais tarde, por R$ 8.160,00. Sabendo-se que neste mesmo período a taxa de inflação foi de 1,3%, determinar a taxa real de juros da aplicação. Resposta: 0,69% a. m.

05- Uma empresa levanta um empréstimo para capital de giro pelo prazo de 3 meses à taxa de 7% a.t.. Qual deverá ser a taxa de inflação no período para que a taxa real de juros seja de 2,6% a.t? Resposta: 4,29% a. t.

06- Uma financeira deseja auferir 1,5% a.m. de taxa real de juros para empréstimos por 6 meses. Qual deverá ser a taxa de juros a ser cobrada, se a inflação estimada no período é de 8%? Resposta: 18,09% a. s.

07- Durante dois semestres consecutivos as taxas de inflação foram de 9% e 12%. Se um investidor aplicou seu dinheiro no mesmo período a uma taxa de juros de 19% ao ano, qual sua taxa real de perda?
Resposta: 2,52% a.a.

08- (ICMS-SP) A inflação acumulada nos dois últimos anos foi de 18%. Então, a queda em poder de compra (perda real) de um trabalhador que teve apenas 6% de reajuste salarial durante esse tempo foi de, aproximadamente:

a) 12% b) 11% c) 10% d) 9% e) 8%

09- (QC-MM) A que taxa de juros real um beneficiário conseguiria um empréstimo, sabendo-se que a inflação semestral é de 6% e que uma instituição financeira empresta dinheiro à taxa de juros de 14,61% ao ano?

a) 2,65% b 2,33% c) 2,16% d) 2,00% e) 1,85%

10- Uma pessoa aplicou R$ 50.000,00 num CDB prefixado de 60 dias e recebeu como montante R$ 51.600,00. No primeiro mês, a taxa de inflação foi de 0,8% e no segundo, de 0,9%.

a)Qual a taxa de juros auferida no período?
b)Qual a taxa de inflação acumulada no período?
c)Qual a taxa real de juros no período?
d)Qual o ganho real expresso em valores monetários?

Respostas: a) 3,20% b) 1,71% c) 1,46% d) R$ 746,40

SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES

1- INTRODUÇÃO:

1.1- Conceito de Série

Define-se anuidade, renda certa ou série a uma sucessão de pagamentos ou recebimentos exigíveis em épocas pré-determinadas, destinada a extinguir uma dívida ou constituir um capital.

1.2 -Simbologia a ser adotada:

P = Valor presente, capital no dia de hoje (principal).

S = Valor futuro, capital no fim do período n (montante).

i = Taxa de juros por período de capitalização.

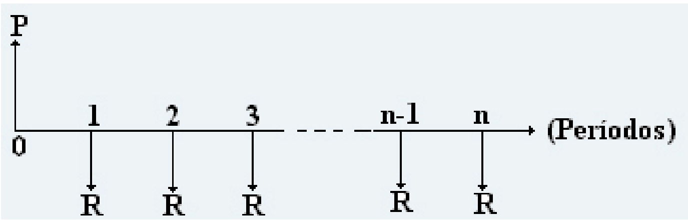
n = Número de períodos de capitalização (número de pagamentos)

R = Cada um dos termos da série de pagamento ou recebimento.

2- Série uniforme com pagamentos postecipados

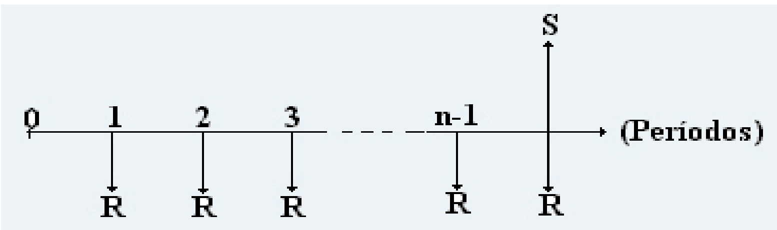
Nas séries uniformes com termos postecipados, os pagamentos ou recebimentos são efetuados no fim de cada intervalo de tempo a que se refere a taxa de juros considerada.

Diagrama da operação



2.1- Fator de Acumulação de Capital:

Problema: Determinar o montante ″**S**″ a partir da Série de pagamentos ″**R**″



$S = R(1 + i)^{n-1} + R(1 + i)^{n-2} + R(1 + i)^{n-3} + \ \ldots \ + R(1 + i)^{1} + R$

Colocando-se R em evidência e invertendo-se a ordem das parcelas, resulta:

$S = R\,[1 + (1 + i) + \ \ldots \ + (1 + i)^{n-3} + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1}\,]$

O fator entre colchetes corresponde à soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão (1 + i), logo,

$$S = R \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{(1+i) - 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

O fator $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$, denominado **FATOR DE ACUMULAÇÃO DE CAPITAL** e, representado por **FRS (i, n)**, permite determinar o montante **S** sendo dado o valor de **R**, isto é:

$$\boxed{S = R \times FRS\ (i, n)}$$

Exemplo: Determine o montante que será obtido no fim de dois anos, com 24 depósitos mensais iguais de R$ 5.000,00, à taxa de 6% ao mês, no regime de juros compostos.

Solução

R = R$ 5.000,00
i = 6% a.m.
n = 24 depósitos
S = ?

Utilizando a fórmula

$$S = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow S = 5.000 \times \times \times \frac{(1+0{,}06)^{24} - 1}{0{,}06} \Rightarrow \mathbf{S = R\$\ 254.077{,}89}$$

Utilizando da tabela financeira:

$S = R \times FRS\ (i, n)$

$S = 5.000 \times FRS\ (6\%, 24) \Rightarrow S = 5.000 \times 50{,}815577 \Rightarrow$ **S = R$ 254.077,89**

2.2- Fator de Formação de Capital

Problema: Determinar o valor do pagamento "**R**" capaz de formar o montante "**S**" no fim do período **n**.

Partindo-se da fórmula $S = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ e explicitando o valor de R, resulta:

$$\mathbf{R = S \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}}$$

O fator $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$, denominado **FATOR DE FORMAÇÃO DE CAPITAL** e, representado por **FSR (i, n)**, permite calcular o valor de **R** sendo conhecido o valor de **S**, isto é:

$$\mathbf{R = S \times FSR\ (i, n)}$$

Exemplo: Quanto uma pessoa terá que aplicar mensalmente num "Fundo de Renda Fixa", durante um ano, para que possa resgatar R$ 20.000,00 ao fim deste prazo, sabendo que o Fundo proporciona um rendimento de 6% ao mês?

Solução:

S = R$ 20.000,00
i = 6% a.m.
n = 12
R = ?

Utilizando a fórmula

$$R = S \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow R = 20.000 \times \frac{0{,}06}{(1+0{,}06)^{12} - 1} \Rightarrow \mathbf{R = R\$\ 1.185{,}54}$$

Utilizando da tabela financeira:

$R = S \times FSR\ (i, n)$

$R = 20.000 \times FSR\ (6\%, 12) \Rightarrow R = 20.000 \times 0{,}059277 \Rightarrow$ **R = R$ 1.185,54**

2.3- Fator de Valor Atual

Problema: Determinar o valor presente "**P**" que deve ser aplicado para que se possa retirar "**R**" em cada um dos **n** períodos subseqüentes.

Partindo-se da expressão $S = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ e substituindo-se S por $P(1 + i)^n$, resulta:

$$P(1+i)^n = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{P = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}}$$

O fator $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$, denominado **FATOR DE VALOR ATUAL** e, representado por **FRP(i, n)**, permite calcular o valor do principal **P** sendo conhecido o valor de **R**, isto é:

$$\boxed{\mathbf{P = R \times FRP\ (i,\ n)}}$$

Exemplo: Uma pessoa, possuidora de 10 títulos, com vencimentos mensais e sucessivos, sendo o vencimento do primeiro de hoje a 30 dias, vende estes títulos com desconto de 8% ao mês, no regime de juros compostos. Quanto apurou com a venda, se o valor nominal de cada título é de R$ 2.500,00?

Solução:

R = R$ 2.500,00
n = 10
i = 8% a. m.
P = ?

Utilizando a fórmula

$$P = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \quad \Rightarrow \quad P = 2.500 \times \frac{(1+0,08)^{10} - 1}{0,08(1+0,08)^{10}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P = R\$\ 16.775,20}$$

Utilizando a tabela financeira:

$P = R \times FRP\ (i,\ n)$

$P = 2.500 \times FRP\ (8\%,\ 10) \quad \Rightarrow \quad P = 2.500 \times 6,710081 \quad \Rightarrow \quad$ **P = R$ 16.775,20**

2.4- Fator de Recuperação de Capital

Problema: Determinar a quantia "**R**" que deve ser retirada em cada período para que se recupere o investimento "**P**" .

Considerando a fórmula $P = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$, e explicitando o valor de R, resulta:

$$\boxed{\mathbf{R = P \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}}$$

O fator $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$, denominado **FATOR DE RECUPERAÇÃO DE CAPITAL** e, representado por **FPR (i, n)**, permite calcular o valor de R sendo conhecido o valor de P, isto é:

$$\boxed{\mathbf{R = P \times FPR\ (i,\ n)}}$$

Exemplo: Qual o valor da prestação mensal que amortiza, em 6 meses, uma dívida de R$ 12.000,00 a juros compostos de 4,5% a.m.?

Solução:

P = R$ 12.000,00
n = 6
i = 4,5 % a. m.
R = ?

Utilizando a fórmula

$$R = P \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow R = 12.000 \times \frac{0{,}045(1+0{,}045)^6}{(1+0{,}045)^6 - 1} \Rightarrow \mathbf{R = R\$\ 2.326{,}54}$$

Utilizando a tabela financeira:

R = P× FPR (i, n)

R = 12.000 × FPR (4,5%, 6) ⇒ R = 12.000 × 0,193878 ⇒ **R = R$ 2.326,54**

2.5- Cálculo da taxa de juros por Interpolação Linear

Exemplo: Uma calculadora é vendida à vista por R$ 160,00 ou a prazo em 4 prestações mensais iguais de R$ 45,49 cada uma, vencendo a primeira um mês após a compra. Qual a taxa de juros compostos do financiamento?

Solução:

P = R$ 160,00
R = R$ 45,49
n = 4
i = ?

Utilizando a tabela financeira

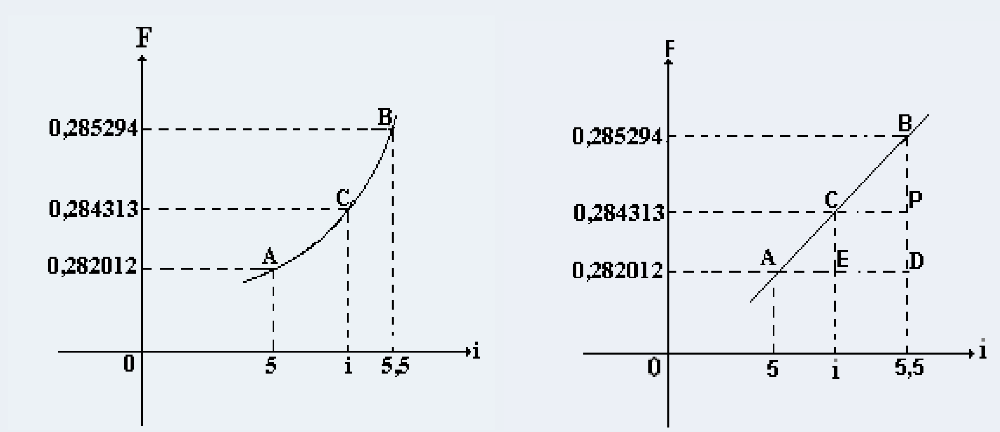
R = P × FPR (i; 4)

$$45{,}49 = 160 \times \text{FPR}\ (i;\ 4) \quad \text{ou} \quad \text{FPR}\ (i,\ 4) = \frac{45{,}49}{160} = 0{,}284313$$

Pesquisando na tabela financeira, para n = 4, não encontramos o valor 0,284313. Isto quer dizer que i não é uma taxa tabelada, porém, deve estar entre 5% e 5,5%, pois FPR (5%, 4) = 0,282012 e FPR (5,5%, 4) = = 0,285294.

Graficamente, temos:

Fig. 1 **Fig. 2**



O procedimento usual para se determinar a taxa de juros consiste em se fazer uma interpolação linear, que significa supor o arco AB (fig. 1) como um segmento de reta AB (fig. 2).

Os triângulos ABD e ACE (fig. 2) são semelhantes (possuem dois ângulos respectivamente iguais), logo,

$\frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}$, isto é,

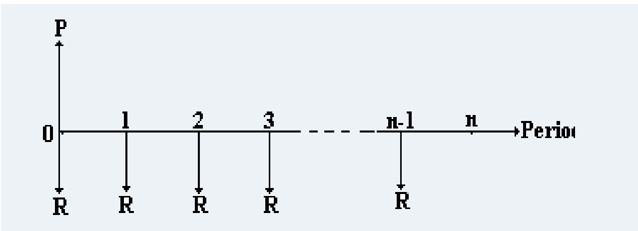
$$\frac{i - 5}{5{,}5 - 5} = \frac{0{,}284313 - 0{,}282012}{0{,}285294 - 0{,}282012} \Rightarrow \frac{i - 5}{0{,}5} = \frac{0{,}002301}{0{,}003282} \Rightarrow \frac{i - 5}{0{,}5} = 0{,}701097 \Rightarrow i - 5 = 0{,}350548 \text{ ou}$$

$i = 5{,}350548 \Rightarrow i = 5{,}35\%$ a.m.

3- SÉRIE UNIFORME COM PAGAMENTOS ANTECIPADOS

Nas séries uniformes com termos antecipados, os pagamentos ou recebimentos são efetuados no início de cada intervalo de tempo a que se refere a taxa de juros considerada. Assim, a primeira prestação é sempre paga ou recebida no momento "zero", ou seja, na data do contrato, do empréstimo, do financiamento ou de qualquer outra operação que implique pagamentos ou recebimentos de prestações.

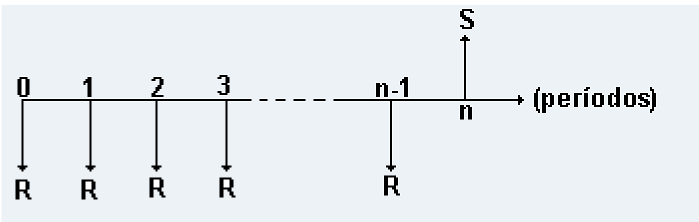
Diagrama da operação



3.1-Cálculo do montante S sendo conhecido o valor de R

Problema: Determinar a quantia **S** acumulada no fim do período **n**, a uma taxa **i** de juros compostos, a partir de **n** parcelas iguais a **R**, de pagamentos antecipados.

Diagrama da operação



$$S = R(1 + i)^n + R(1 + i)^{n-1} + R(1 + i)^{n-2} + . . . + R(1 + i)^1$$

$$S = R[(1 + i)^n + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + . . . + (1 + i)^1]$$

$$S = R[(1 + i)^1 + . . . + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^n]$$

$$S = R \times \frac{(1+i)[(1+i)^n - 1]}{(1+i) - 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathbf{S = R(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}}$$

Como $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ = FRS (i, n) e (1 + i) = FPS (i, 1) , segue-se que:

$$\boxed{\mathbf{S = R \times FPS (i, 1) \times FRS (i, n)}}$$

Exemplo: Qual o montante, no fim do décimo mês, resultante da aplicação de 10 parcelas mensais iguais e consecutivas de R$ 5.000,00, à taxa de 4% a.m., de juros compostos, sabendo-se que a primeira aplicação é feita no início do primeiro mês?

Solução:

n = 10
i = 4% a.m.
R = R$ 5.000,00
S = ?

Utilizando a fórmula:

$$S = R(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow S = 5.000 \times (1 + 0{,}04) \times \frac{(1+0{,}04)^{10} - 1}{0{,}04} \Rightarrow \mathbf{S = R\$ \ 62.431{,}7}$$

Utilizando da tabela financeira:

S = R × FPS (i, 1) × FRS (i, n)

S = 5.000 × FPS (4% , 1) × FRS (4%, 10)

S = 5.000 × 1,040000 × 12,00611 ⇒ **S = R$ 62.431,77**

3.2-Cálculo de R sendo conhecido o montante S

Partindo-se da fórmula : $S = R(1 + i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ e explicitando-se o valor de **R**, teremos:

$$\boxed{\mathbf{R = S(1+i)^{-1} \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}}}$$

Como $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ = FSR (i, n) e $(1 + i)^{-1}$ = FSP (i, 1) , segue-se que:

$$\boxed{\mathbf{R = S \times FSP\ (i, 1) \times FSR\ (i, n)}}$$

Problema: Quanto terei de aplicar mensalmente, a partir de hoje, para acumular, no final de 12 meses, um montante no valor de R$ 30.000,00, sabendo-se que a taxa de juros compostos a ser firmada é de 3% a.m., e que as aplicações serão iguais e em número de 12?

Solução:

n = 12
S = R$ 30.000,00
i = 3% a.m.
P = ?

Utilizando a fórmula

$$R = S(1 + i)^{-1} \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$R = 30.000 \times (1 + 0{,}03)^{-1} \times \frac{0{,}03}{(1+0{,}03)^{12} - 1} \Rightarrow \mathbf{R = R\$ \ 2.052{,}29}$$

Utilizando a tabela financeira:

R = S × FSP (i, 1) × FSR (i, n)

R = 30.000 × FSP (3%, 1) × FSR (3% , 12)

R = 30.000 × 0,970874 × 0,070462 ⇒ **R = R$ 2.052,29**

3.3- Cálculo do valor atual P sendo conhecido o valor de R

Considerando-se a fórmula: S = R(1 + i) $\times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, e substituindo-se o valor de **S** por P(1 + i)^n, teremos:

P(1 + i)^n = R(1 + i) $\times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, onde, explicitando-se o valor de **P**, resulta

$$\mathbf{P = R(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}$$

Como, (1 + i) = FPS (i, 1) e $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ = FRP (i, n) , segue-se que:

P = R × FPS (i, 1) × FRP (i, n)

Exemplo: Um equipamento está sendo oferecido, no crediário, para pagamento em 8 prestações mensais iguais e consecutivas de R$ 5.800,00. Sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada é de 10% ao mês e que a primeira prestação deve ser paga no ato da compra, determinar o preço a vista desse equipamento.

Solução:

R = R$ 5.800,00
i = 10 % a. m.
n = 8
P = ?

Utilizando a fórmula:

$$P = R(1 + i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$P = 5.800 \times (1 + 0{,}10) \times \frac{(1+0{,}10)^8 - 1}{0{,}10(1+0{,}10)^8} \Rightarrow \mathbf{P = R\$\ 34.036{,}83}$$

Utilização da tabela financeira:

P = R × FPS (i, 1) × FRP (i, n)

P = 5.800 × FPS (10% , 1) × FRP (10% , 8) ⇒ P = 5.800 × 1,100000 × 5,334926 ⇒ **P = R$ 34.036,83**

3.4- Cálculo do valor de R sendo conhecido o principal P

Partindo-se da fórmula: P = R(1 + i) $\times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$, e explicitando-se o valor de **R**, resulta:

$$\mathbf{R = P(1+i)^{-1} \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}$$

Como, (1 + i)$^{-1}$ = FSP (i, 1) e $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ = FPR (i, n) , segue-se que:

R = P × FSP (i, 1) × FPR (i, n)

Exemplo: Um aparelho de TV, no valor de R$ 420,00, é financiado por uma loja, para pagamento em 12 prestações mensais iguais e consecutivas. Determinar o valor da prestação sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada é de 9,5% a.m.

Solução:

P = R$ 420,00
i = 9,5 % a. m.
n = 12
R = ?

Utilizando a fórmula:

$$R = P(1+i)^{-1} \times \frac{i(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1} \Rightarrow R = 420 \times (1 + 0{,}095)^{-1} \times \frac{0{,}095(1+0{,}095)^{12}}{(1+0{,}095)^{12}-1} \Rightarrow \mathbf{R = R\$\ 54{,}92}$$

Utilizando da tabela financeira:

$R = P \times FSP\ (i,\ 1) \times FPR\ (i,\ n)$

$R = 420 \times FSP\ (9{,}5\%,\ 1) \times FPR\ (9{,}5\%,\ 12) \Rightarrow R = 420 \times 0{,}913242 \times 0{,}143188 \Rightarrow$ **R = R$ 54,92**

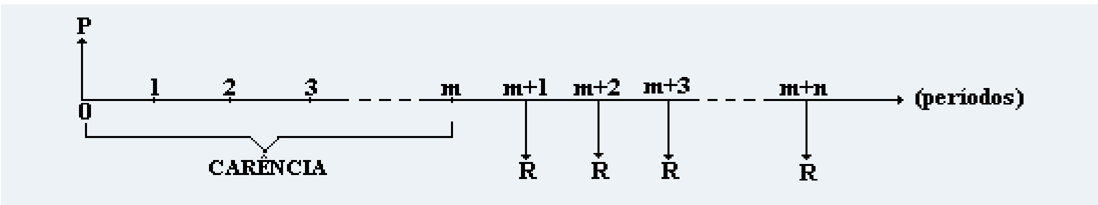
4- SÉRIE UNIFORME DIFERIDA

Tem-se uma série diferida ou com carência, quando o primeiro pagamento só ocorre depois de decorridos **m** períodos de tempo a que se refere a taxa de juros considerada (**m** ≥ **2**).

As séries diferidas envolvem apenas cálculos relativos a valor atual, pois o montante é igual ao montante de uma série de pagamentos iguais com termos vencidos, uma vez que durante o prazo de carência, não há pagamentos e capitalizações.

4.1-Cálculo do valor atual P sendo conhecido o valor de R

Considere o seguinte fluxo de caixa, de uma série com m períodos de carência:



Para o cálculo do valor atual (**P**) procede-se da seguinte maneira:

1º) Calcula-se, inicialmente, o valor de **P** na data **m** com a fórmula do valor atual de uma série uniforme postecipada, isto é:

$$P_m = R \times \frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}} \quad \text{ou} \quad P_m = R \times FRP(i;\ n)$$

2º) Calcula-se o capital **P** (na data 0) equivalente ao valor futuro $\mathbf{P_m}$, isto é:

$P = P_m\,(1 + i)^{-m}$ ou $P = P_m \times FSP(i\ ;\ m)$

Substituindo o valor de P_m, resulta:

$$\boxed{\mathbf{P = R \times \frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}} \times (1+i)^{-m}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathbf{P = R \times FRP(i\ ;\ n) \times FSP(i\ ;\ m)}}$$

Problema: Calcular o valor atual de uma série de 10 pagamentos mensais iguais e consecutivos, de R$ 20.000,00, com carência de 3 meses, à taxa de 4,5% ao mês, no regime de juros compostos.

Solução:

R = R$ 20.000,00
n = 10
m = 3
i = 4,5% a.m.

Utilizando a fórmula:

$$P = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \times (1 + i)^{-m}$$

$$P = 20.000 \times \frac{(1+0,045)^{10} - 1}{0,045(1+0,045)^{10}} \times (1 + 0,045)^{-3} \Rightarrow \mathbf{P = R\$\ 138.677,76}$$

Utilizando a tabela financeira:

$P = R \times FRP(i, n) \times FSP(i, m)$

$P = 20.000 \times FRP(4,5\%, 10) \times FSP(4,5\%, 3)$

$P = 20.000 \times 7,912718 \times 0,876297 \Rightarrow$ **P = R$ 138.677,76**

4.2-Cálculo do valor de R sendo conhecido o valor de P

Para o cálculo do valor de **R** procede-se da seguinte maneira:

1º) Inicialmente, calcula-se o valor de **P** na data **m**, isto é:

$P_m = P(1 + i)^m$ ou $P_m = P \times FPS(i ; m)$

2º) Calcula-se o valor de **R** correspondente ao valor $\mathbf{P_m}$, isto é:

$$R = P_m \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \quad \text{ou} \quad R = P_m \times FPR(i ; n)$$

Substituindo o valor de $\mathbf{P_m}$, resulta:

$$\boxed{\mathbf{R = P \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \times (1 + i)^m}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathbf{R = P \times FPR(i ; n) \times FPS(i ; m)}}$$

Problema: Um empréstimo de R$ 10.000,00 vai ser amortizado com 12 prestações mensais iguais, com 5 meses de carência. Calcular o valor das prestações à taxa de 4,5% a.m., no regime de juros compostos.

Solução:

P = R$ 10.000,00
n = 12
m = 5
i = 4,5% a.m.

Utilizando a fórmula:

$$R = P \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \times (1 + i)^m$$

$$R = 10.000 \times (1 + 0,045)^5 \times \frac{0,045(1+0,045)^{12}}{(1+0,045)^{12} - 1} \Rightarrow \mathbf{R = R\$\ 1.366,64}$$

Utilizando a tabela financeira:

$R = P \times FPS(i, m) \times FPR(i, n)$

$R = 10.000 \times FPS(4{,}5\%, 5) \times FPR(4{,}5\%, 12)$

$R = 10.000 \times 1{,}246182 \times 0{,}109666$

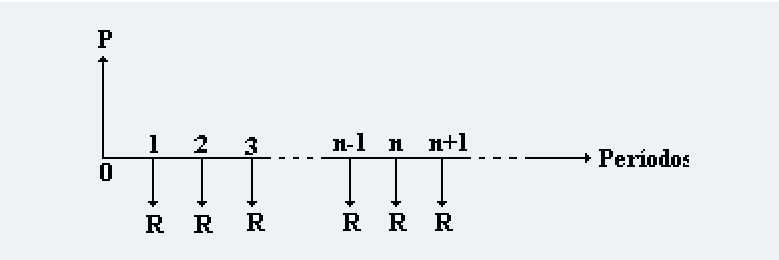
R = R$ 1.366,64

5- SÉRIE UNIFORME INFINITA (PERPETUIDADE)

Se um investimento **P** é feito à taxa i para gerar rendimentos **R** indefinidamente, temos, então, o que se denomina perpetuidade.

5.1- Valor atual de uma série perpétua

Considere uma série uniforme de pagamentos com pagamentos postecipados e com número infinito de termos.



$$P = R(1 + i)^{-1} + R(1 + i)^{-2} + R(1 + i)^{-3} + \dots + R(1 + i)^{-(n-1)} + R(1 + i)^{-n} + \dots$$

Conforme pode-se observar, o valor atual da série é o limite da soma dos valores atuais de seus termos quando o número destes tende ao infinito, isto é:

$$P = \lim_{n\to\infty} R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Considerando que $\dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \dfrac{\dfrac{(1+i)^n}{(1+i)^n} - \dfrac{1}{(1+i)^n}}{\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n}} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{(1+i)^n}}{i}$, segue-se que:

$$P = \lim_{n\to\infty} R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = R \times \frac{1 - \dfrac{1}{(1+i)^\infty}}{i} = R \times \frac{1-0}{i} = R \times \frac{1}{i} \Rightarrow \boxed{\mathbf{P = \frac{R}{i}}}$$

Exemplo: Quanto devemos investir hoje para criar uma fundação que irá premiar, anualmente, o "melhor" aluno de matemática financeira de uma Instituição de Ensino com a quantia de 2.000 dólares? A fundação terá duração infinita e a taxa de juros compostos para este tipo de aplicação é de 10% ao ano.

Solução:

$$P = \frac{R}{i} \Rightarrow P = \frac{2.000}{0{,}10} = 20.000 \text{ dólares}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

01- Quanto uma pessoa obterá no fim de 6 meses, se aplicar mensalmente a importância de R$ 10.000,00 em um investimento cuja remuneração é de 7% a.m., no regime de juros compostos? Resposta: R$ 71.532,91

02- Quanto uma pessoa acumulará no fim de 24 meses, se depositar mensalmente a importância de R$ 5.000,00 em uma instituição que paga juros compostos à taxa de 8% ao mês? Resposta: R$ 333.823,80

03- Se uma pessoa deseja acumular a quantia de R$ 52.000,00 no fim de 12 meses, quanto deverá depositar mensalmente em um banco que paga a taxa de juros compostos de 6,5% a.m.? Resposta: R$ 2.993,54

04- Quanto um investidor deverá oferecer por uma série de 20 títulos mensais e no valor de R$ 5.000,00 cada um, para auferir uma rentabilidade de 9% a.m.? Resposta: R$ 45.642,73

05- Um financiamento foi concedido a uma taxa de juros compostos de 5% a.m., para ser pago em 12 prestações mensais iguais e sucessivas, no valor de R$ 12.000,00 cada. Qual o valor do principal desse financiamento? Resposta: R$ 106.359,02

06- Qual o menor investimento que devemos fazer hoje, a uma taxa de 5,5% a.m., no regime de juros compostos, para podermos receber a importância de R$1.500,00 no final de cada um dos próximos 8 meses? Resposta: R$ 9.501,85.

07- Uma empresa financia a venda de suas máquinas e equipamentos por um prazo de 12 meses, a uma taxa efetiva de 8% a.m., no regime de juros compostos. Determinar o valor da prestação mensal para a venda de uma máquina cujo preço a vista é de R$ 20.000,00. Resposta: R$ 2.653,90

08- Qual é o número de depósitos que deverá ser efetuado para se obter um montante de R$ 54.541,50, depositando-se mensalmente a importância de R$ 3.735,22 a uma taxa de juros compostos de 3,5% ao mês? Resposta: 12

09- Um empréstimo cujo valor do principal é de R$ 12.000,00 foi realizado com taxa de juros compostos de 96% ao ano, capitalizada trimestralmente e deverá ser liquidado mediante o pagamento de 8 prestações trimestrais iguais e sucessivas. Determinar o valor dessas prestações. Resposta: R$3.507,52.

10- Uma pessoa pode dispor, mensalmente, de apenas R$ 2.000,00 para pagar as 12 prestações mensais iguais e sucessivas, relativas ao financiamento de um equipamento, cujo valor à vista é de R$ 18.000,00. Calcular o valor que deverá ser dado de sinal, a título de entrada, para que o financiamento possa ser efetuado a uma taxa de 8% ao mês. Resposta: R$ 2.927,84

11- Um forno microondas é vendido em 6 prestações mensais iguais de R$ 91,33, sendo a primeira no ato da compra (prestações antecipadas). Se a taxa de juros compostos for de 8% a.m., qual o valor a vista desse forno? Resposta: R$ 456,00

12-Um freezer é vendido a vista por R$ 658,00 ou em 5 prestações mensais iguais, sendo a primeira dada no ato da compra como entrada. Calcular o valor de cada prestação sabendo que a taxa de juros compostos é de 9% a.m. Resposta: R$ 155,20

13- Uma coleção de livros é vendida por R$ 650,00 a vista ou em 6 prestações mensais iguais e consecutivas, sendo a primeira no ato da compra. Considerando-se a taxa de juros compostos de 8% a.m., determinar o valor das prestações. Resposta: R$ 130,19

14- Quanto acumularia um investidor no fim de dois anos e meio se fizesse, a partir de hoje, 30 depósitos mensais de R$ 2.000,00, em uma instituição que paga juros compostos à taxa de 6% a.m.? Resposta: R$ 167.603,35.

15- Uma mercadoria é oferecida para pagamento em 6 prestações mensais iguais e antecipadas de R$ 18.600,00, com taxa de juros compostos de 8% a.m. Determine o valor a vista (valor presente) dessa mercadoria. Resposta: R$ 92.864,41

16- Quanto se deve depositar, no início de cada trimestre, numa instituição financeira que paga juros compostos de 10,5% ao trimestre, para constituir um montante no valor de R$ 109.381,38, ao fim de 2 anos. Resposta :R$ 8.500,00.

17- Um videocassete é vendido a vista por R$ 509,00 ou em 4 prestações mensais iguais de R$ 147,55, sendo a primeira paga no ato da compra. Determinar a taxa de juros compostos do financiamento. Resposta: 10,86% a.m.

18- Uma loja de automóveis financia, integralmente, um veículo no valor de R$ 16.500,00, em 12 parcelas iguais, mensais e consecutivas, de R$ 2.093,10. Calcular a taxa mensal de juros compostos cobrada, sabendo-se que a primeira prestação é paga no ato da compra. Resposta: 8,76% a.m.

19-Uma loja vende determinado tipo de televisor em seis prestações mensais iguais de R$ 93,93, sendo a primeira prestação paga no ato da compra. Se o preço a vista desse televisor é de R$ 450,00, qual é a taxa mensal de juros compostos cobrada. Resposta: 10% a.m.

20- Um empréstimo de R$ 19.000,00 é amortizado em 12 prestações mensais iguais, vencendo a primeira no fim de 5 meses após a assinatura da promissória. Se a taxa de juros compostos contratada é de 7% ao mês, qual é o valor do pagamento mensal? Resposta: R$ 3.135,60.

21- O Banco do Brasil financia a compra de máquinas e equipamentos para a empresa rural, em 15 pagamentos mensais iguais, a juros compostos de 60% a.a., capitalizados mensalmente, com carência de 6 meses. Determinar o valor da prestação de uma máquina cujo preço a vista é de R$ 48.000,00. Resposta: R$ 6.197,18.

22- Um consumidor adquire uma geladeira pelo sistema de crediário para pagamento em 6 prestações mensais iguais de R$ 83,80. Sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada é de 6% a.m., e que a primeira prestação será paga no final do quinto mês (4 meses de carência). Determinar o valor do financiamento. Resposta: R$ 326,40.

23- Uma pessoa obtém um financiamento, para a compra de um veículo, a ser liquidado em 18 meses, com carência de 4 meses. Sabendo-se que o valor de cada uma das 8 primeiras prestações é de R$ 1.800,00 e que o valor de cada uma das 10 últimas é de R$ 2.500,00, calcular o valor financiado para uma taxa de juros compostos de 10% ao mês. Resposta: R$ 11.453,51.

24- Determinar o valor da prestação mensal perpétua que remunera um investimento de R$ 120.000,00 com taxa de juros compostos de 1,8% ao mês. Resposta: R$ 2.160,00

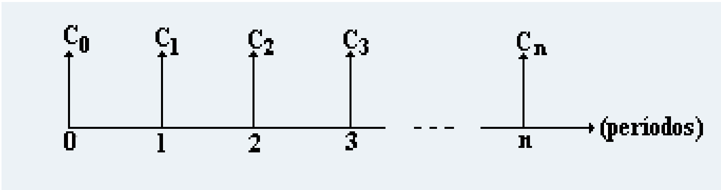
25- Determinar o investimento necessário para garantir um recebimento trimestral de R$ 2.000,00, de forma perpétua, sabendo-se que esse investimento é remunerado com uma taxa efetiva de 4% ao trimestre, no regime de juros compostos. Resposta: R$ 50.000,00

EQUIVALÊNCIA DE FLUXOS DE CAIXA

1-Valor Atual ou Valor Presente de um Fluxo de Caixa:

Denomina-se valor atual (ou valor presente) de um fluxo de caixa à soma dos valores atuais de suas parcelas futuras, descontadas com uma determinada taxa de juros. Portanto, o valor atual é um capital que na data 0(zero) é equivalente ao conjunto de capitais futuros que compõem o fluxo de caixa em questão.

Assim, dado o fluxo de caixa:



Chamando de **P** o valor atual e considerando uma taxa **i** de juros compostos, segue-se que:

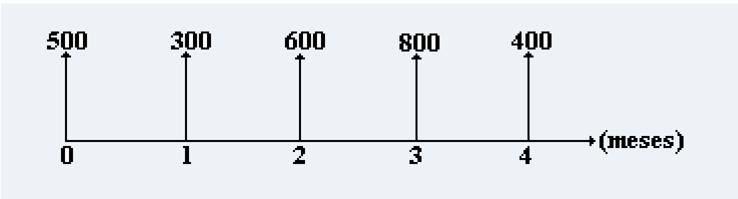
$$P = C_0 + \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$P = C_o + C_1(1 + i)^{-1} + C_2(1 + i)^{-2} + C_3(1 + i)^{-3} + \dots + C_n(1 + i)^{-n}$$

$$P = C_0 + C_1 \times FSP(i; 1) + C_2 \times FSP(i; 2) + C_3 \times FSP(i; 3) + \dots + C_n \times FSP(i; n)$$

Exemplos:

1º) Determinar o valor atual do fluxo de caixa a seguir, utilizando a taxa de 2% a.m., no regime de juros composto.



Utilizando a fórmula:

$$P = 500 + \frac{300}{(1+0{,}02)^1} + \frac{600}{(1+0{,}02)^2} + \frac{800}{(1+0{,}02)^3} + \frac{400}{(1+0{,}02)^4}$$

P = 500 + 294,12 + 576,70 + 753,86 + 369,54 $\Rightarrow$ **P = 2.494,22**

Utilizando da tabela financeira:

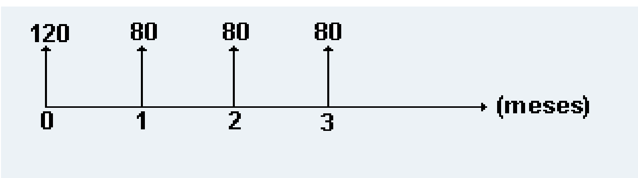
P = 500 + 300 × FSP(2%; 1) + 600 × FSP(2%; 2) + 800 × FSP(2%; 3) + 400 × FSP(2%; 4)

P = 500 + 300 × 0,980392 + 600 × 0,961169 + 800 × 0,942322 + 400 × 0,923845

P = 500 + 294,12 + 576,70 + 753,86 + 369,54 $\Rightarrow$ **P = 2.494,22**

2º) Uma loja vende determinado tipo de videocassete nas seguintes condições: Uma parcela de R$ 120,00 de entrada, mais três parcelas de R$ 80,00 no final de 30, 60 e 90 dias, respectivamente. Qual o valor a vista do videocassete se a taxa de juros compostos cobrada é de 6% ao mês?

DIAGRAMA DA OPERAÇÃO



Utilizando a fórmula:

$$P = 120 + \frac{80}{(1+0{,}06)^1} + \frac{80}{(1+0{,}06)^2} + \frac{80}{(1+0{,}06)^3}$$

$P = 120 + 75{,}47 + 71{,}20 + 67{,}17 \Rightarrow$ **P = R$ 333,84**

Utilizando da tabela financeira:

$P = 120 + 80 \times FSP(6\%; 1) + 80 \times FSP(6\%; 2) + 80 \times FSP(6\%; 3)$

$P = 120 + 80 \times 0{,}943396 + 80 \times 0{,}889996 + 80 \times 0{,}839619$

$P = 120 + 75{,}47 + 71{,}20 + 67{,}17 =$ **R$ 333,84**

Observação.: Neste caso poderíamos, ainda, utilizar o fator FRP(6%,3), isto é:

$P = 120 + 80 \times FRP(6\%, 3) \Rightarrow P = 120 + 80 \times 2{,}673012 \Rightarrow P = 120 + 213{,}84 \Rightarrow$ **P = R$ 333,84**

2-Desconto de Fluxo de Caixa

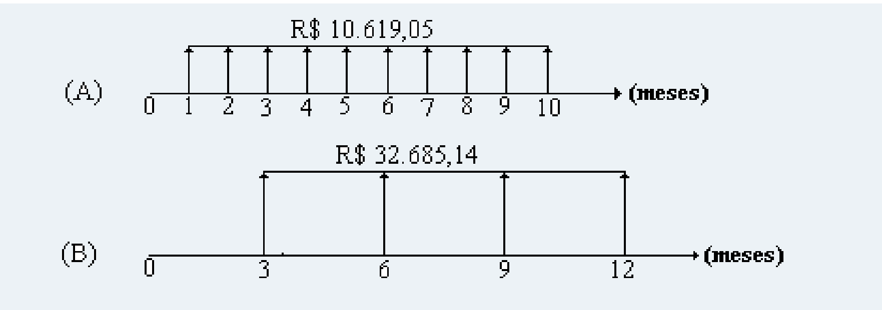
3.1- Denomina-se desconto de fluxo de caixa a operação pela qual se calcula o seu valor atual (ou Valor presente).

3.2-Taxa de desconto de um fluxo de caixa é a taxa de juros usada no desconto deste fluxo de caixa.

3- Fluxos de Caixa Equivalentes

Dois ou mais fluxos de caixa são equivalentes numa determinada taxa de juros compostos, se os seus valores atuais, calculados com essa mesma taxa, forem iguais.

Exemplo: Verifique se os fluxos (A) e (B), dados a seguir, são equivalentes à taxa de 12% ao mês, no regime de juros compostos



Solução:

$P_A = 10.619{,}05 \times FRP(12\%, 10) = 10.619{,}05 \times 5{,}650223 = 60.000{,}00$

$$P_B = \frac{32.685{,}14}{(1+0{,}12)^3} + \frac{32.685{,}14}{(1+0{,}12)^6} + \frac{32.685{,}14}{(1+0{,}12)^9} + \frac{32.685{,}14}{(1+0{,}12)^{12}}$$

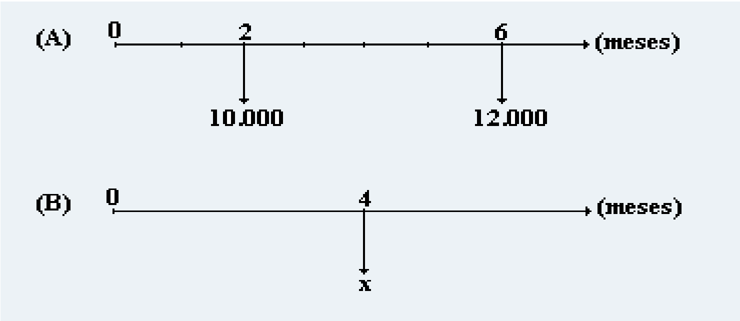
$P_B = 23.264{,}64 + 16.559{,}31 + 11.786{,}59 + 8.389{,}46 = 60.000{,}00$

Logo, como $P_A = P_B$, segue-se que os fluxos (A) e (B) são equivalentes na taxa de 12% ao mês.

A importância e a utilização dos fluxos de caixa equivalentes residem nas definições de diversas opções de pagamentos de empréstimos, compras financiadas, substituições de saldos devedores por outros de maior conveniência, reescalonamento de dívidas, etc.

Exemplo: Uma pessoa deseja trocar dois títulos, um de valor nominal igual a R$10.000,00 e outro de valor nominal igual a R$12.000,00, vencíveis, respectivamente, dentro de 2 e 6 meses, por um único título vencível em 4 meses. Sendo a taxa de juros compostos igual a 10% ao mês, qual o valor do novo título ?

DIAGRAMA DA OPERAÇÃO



SOLUÇÃO:

$P(A) = 10.000(1 + 0,10)^{-2} + 12.000(1 + 0,10)^{-6} = 15.038,15$

$P(B) = x.(1 + 0,10)^{-4} = x\cdot(0,683013)$

Fazendo-se P(A) = P(B), temos:

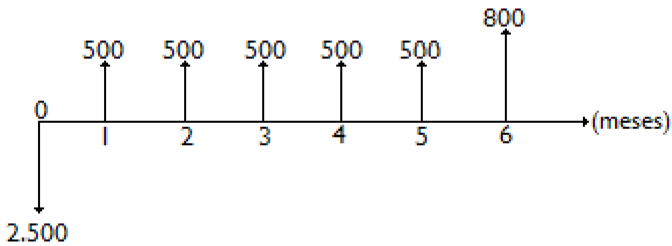
$x\cdot(0,683013) = 15.038,15 \Rightarrow$ **x = R$ 22.017,36**

4- Valor Presente Líquido de um Fluxo de Caixa (VPL)

O Valor Presente Líquido de um fluxo de caixa é igual ao valor presente de suas parcelas futuras (que são descontadas com uma determinada taxa de desconto), somado algebricamente com a grandeza colocada no ponto zero.

Normalmente, a grandeza colocada no ponto zero corresponde ao investimento inicial e tem sinal negativo, uma vez que representa uma saída de caixa.

Exemplo: Determine o valor presente líquido do seguinte fluxo de caixa, com uma taxa de desconto de 3% ao mês.



Solução:

$VPL = 500 \times FRP(3\%, 5) + 800 \times FSP(3\%, 6) - 2.500$

$VPL = 500 \times 4,579707 + 800 \times 0,837484 - 2.500 = 2.289,85 + 669,99 - 2.500 = 459,84$

5-Taxa Interna de Retorno de um Fluxo de Caixa

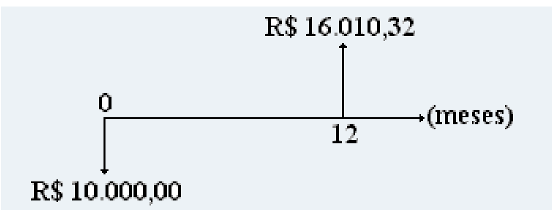
Denomina-se ***taxa interna de retorno*** de um fluxo de caixa a taxa de juros compostos que anula o seu valor atual.

A taxa interna de retorno de um fluxo de caixa representa a taxa de juros compostos segundo a qual os encaixes (vetores para cima) se igualam aos desencaixes (vetores para baixo), em uma determinada data.

A determinação da taxa interna de retorno é bastante trabalhosa e, por isso, adotamos com freqüência um valor aproximado que é obtido por interpolação linear entre duas taxas de juros que delimitam o valor procurado.

Exemplos:

1º) Se um investimento igual a R$ 10.000,00, produz uma taxa interna de retorno de 4% ao mês, teremos, após um ano, o montante de R$ 16.010,32, isto é: $S = 10.000 \times (1 + 0,04)^{12} \Rightarrow S = R\$ 16.010,32$



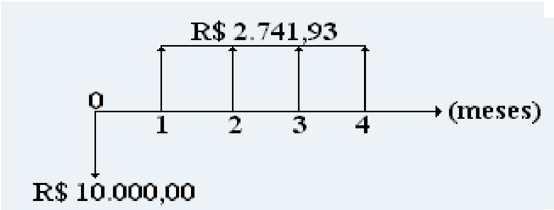
Solução:

O valor presente líquido do fluxo de caixa será:

P = - 10.000,00 + 16.010,32 × FSP(4%, 12)

P = - 10.000,00 + 16.010,32 × 0,624597 $\Rightarrow$ P = - 10.000,00 + 10.000,00 = 0

2º) Determinar a taxa interna de retorno do investimento representado pelo fluxo de caixa seguinte:



Solução:

P = - 10.000,00 + 2.741,93 × FRP(i, 4) = 0

2.741,93 × FRP(i, 4) = 10.000,00 $\Rightarrow$ FRP(i, 4) = $\dfrac{10.000,00}{2.741,93}$ = 3, 647066

Com o auxílio das tabelas financeiras, podemos observar que a taxa procurada está entre 3,5% e 4%, pois: FRP(3,5%, 4) = 3,673079 e FRP(4%, 4) = 3,629895

Feita esta observação, podemos escrever:

3,673079 .... 3,50%
3,647066..................... i
3,629895%.................. 4,00%

$$\frac{3,629895 - 3,673079}{3,629895 - 3,647066} = \frac{4,00 - 3,50}{4,00 - i} \quad \Rightarrow \quad i = 3,80\% \text{ a. m.}$$

3º) Um empreendimento exige investimentos iniciais da ordem de R$ 20.000,00 e proporciona retornos de R$ 5.000,00 no final do primeiro ano, R$ 12.000,00 no final do segundo ano e R$ 8.000,00 no final do terceiro ano. Qual a taxa interna de retorno desse investimento?

Solução:

$$P(i) = -20.000 + \frac{5.000}{(1+i)^1} + \frac{12.000}{(1+i)^2} + \frac{8.000}{9(1+i)^3}$$

Como as entradas são diferentes, devemos, inicialmente, “chutar” uma taxa na tentativa de igualarmos o segundo membro da igualdade a zero.

$$P(5\%) = -20.000 + \frac{5.000}{1,05^1} + \frac{12.000}{1,05^2} + \frac{8.000}{1,05^3}$$

P(5%) = - 20.000 + 4.761,90 + 10.884,35 + 6.910,70 = 2.556,95

Conforme podemos observar, quanto maior a taxa de desconto, menor será o valor atual do fluxo. Assim, utilizando uma taxa maior (8% por exemplo), teremos:

$$P(8\%) = -20.000 + \frac{5.000}{1,08^1} + \frac{12.000}{1,08^2} + \frac{8.000}{1,08^3}$$

P(8%) = - 20.000 + 4.629,63 + 10.288,07 + 6.350,66 = 1.268,3

Aumentando, ainda mais a taxa de desconto, (10% por exemplo) teremos:

$$P(10\%) = -20.000 + \frac{5.000}{1,10^1} + \frac{12.000}{1,10^2} + \frac{8.000}{1,10^3}$$

P(10%) = - 20.000 + 4.545,45 + 9.917,36 + 6.010,52 = 473,33

Devemos continuar o processo até conseguirmos um valor negativo.

$$P(11\%) = -20.000 + \frac{5.000}{1,11^1} + \frac{12.000}{1,11^2} + \frac{8.000}{1,11^3}$$

P(11%) = - 20.000 + 4.504,50 + 9.739,47 + 5.849,53 = 93,50

$$P(12\%) = -20.000 + \frac{5.000}{1,12^1} + \frac{12.000}{1,12^2} + \frac{8.000}{1,12^3}$$

P(12%) = - 20.000 + 4.464,29 + 9.566,33 + 5.694,24 = - 275,14

A taxa interna de retorno é a taxa que anula o valor atual, logo, podemos concluir que a taxa procurada está compreendida entre 11% e 12%., isto é:

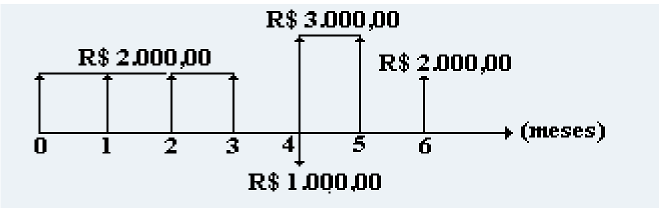
11% 93,50
i 0,00
12% .... – 275,14

Fazendo-se uma interpolação linear, com esses valores, obtemos:

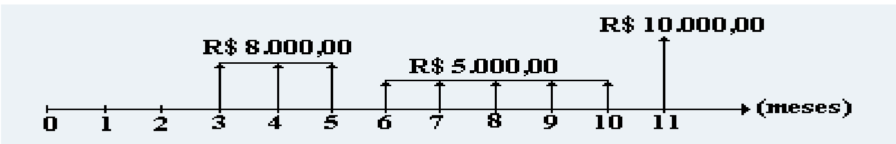
$$\frac{i-11}{12-11} = \frac{0-93,50}{-275,14-93,50} \Rightarrow i - 11 = 0,253635 \Rightarrow \mathbf{i = 11,25\%\ a.a.}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

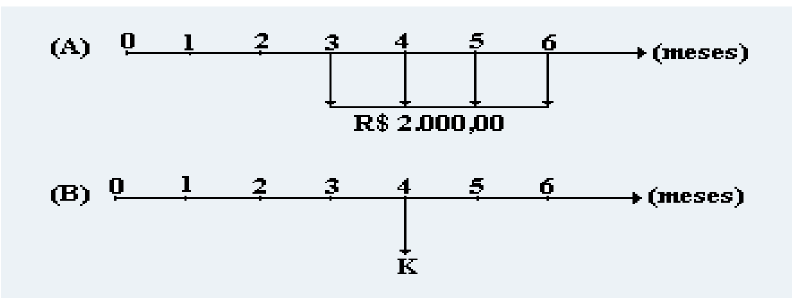
i. Qual o valor atual do fluxo de caixa abaixo, para uma taxa de juros compostos de 10,5% ao mês? Resposta: R$ 11.191,36.



02- Determinar o valor atual do seguinte fluxo de caixa, para uma taxa de juros compostos de 6,5% ao mês. Resposta: R$ 38.848,30.



03- Calcular o valor de K para que os fluxos de caixa (A e B) seguintes sejam equivalentes a uma taxa de 3,5% a. m. de juros compostos. Resposta: K = R$ 7.869,39.



04- Uma determinada instituição de crédito realiza operações financeiras com uma taxa efetiva de 2% ao mês. O financiamento pode ser pago de duas maneiras, ou seja:

a) em prestações mensais iguais;
b) em prestações trimestrais iguais.

Determine o valor dessas prestações para um financiamento de R$ 1.500,00 que será amortizado em 12 meses. **Resposta: a) R$ 141,84 b) R$ 434,0**

05- Um indivíduo deseja vender um terreno de sua propriedade por R$ 250.000,00 à vista, porém, concorda em financiar 50% do valor, em um ano, a juros de 1% a. m., através de um dos seguintes planos de pagamento.

a) doze prestações mensais de R$ 8.000,00 e mais duas parcelas semestrais iguais a serem determinadas;
b) duas parcelas semestrais de R$ 30.000,00 e mais doze prestações mensais iguais a serem determinadas.

Calcular os valores desconhecidos nos dois planos para que os mesmos sejam equivalentes, a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. **Resposta: a) R$ 19.108,96 b) R$ 6.229,69**

06- Uma empresa toma por empréstimo R$ 230.000,00, com juros compostos de 10% ao mês. Após 2 meses, a empresa propõe pagar R$ 120.000,00 imediatamente e liquidar o saldo devedor no fim de 3 meses, a partir daquela data. Calcular o valor desse pagamento. **Resposta: R$ 210.697,46**

07- Um financiamento cujo valor do principal é de R$ 100.000,00, deve ser liquidado através do pagamento de duas parcelas, uma no final do mês 2 e outra no final do mês 5. Determinar o valor desses pagamentos, sabendo-se que a última parcela é três vezes maior que a primeira, e, que a taxa de juros compostos desse financiamento é de 8% ao mês. **Resposta: R$ 34.493,61**

08- Uma empresa devedora de três títulos de R$ 10.000,00 cada um e cujos vencimentos são, hoje e daqui a 2 e 5 meses, deseja substituí-los por um único título com vencimento para 6 meses. Determinar o valor deste título para uma taxa de juros compostos de 6% ao mês. **Resposta: R$ 37.409,96**

10-Uma dívida, que consiste em três pagamentos mensais: R$ 30.000,00 no fim do mês um, R$ 40.000,00 no fim do mês dois e R$ 50.000,00 no fim do mês três, deve ser substituída por uma série de pagamentos mensais de 12 prestações iguais, sendo a primeira paga na data zero. Sabendo-se que a taxa de juros compostos acertada é de 9,5% ao mês, calcular o valor das prestações. **Resposta: R$ 12.924,87**

11-Um gravador pode ser vendido para pagamento em três parcelas mensais iguais sem acréscimo, sendo a primeira dada como entrada e as outras duas após 30 e 60 dias, respectivamente. Se o pagamento for feito a vista, será dado um desconto de 6%. Qual a melhor alternativa para o comprador se a taxa de juros compostos do mercado for de 5% ao mês? (Considere um valor arbitrário qualquer para o preço do gravador). **Resposta: É melhor a compra a vista.**

12- Uma dívida deverá ser resgatada em quatro parcelas de R$ 10.000,00, R$ 12.000,00, R$ 14.000,00 e R$ 15.000,00 no final dos meses 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Se a taxa de juros compostos é de 4% ao mês, qual o valor atual dessa dívida? **Resposta: R$ 45.978,07.**

13- Uma pessoa investiu R$100.000,00 na data zero e obteve entradas iguais de R$ 36.720,90 nos três meses subseqüentes. Qual a taxa interna de retorno dessa aplicação? **Resposta: 5% a. m.**

14 Um empreendimento exige investimentos iniciais da ordem de R$ 50.000,00 e proporciona um retorno de R$15.773,54 em cada um dos quatro meses seguintes. Qual a taxa interna de retorno desse empreendimento? **Resposta: 10% a. m.**

15- Uma instituição financeira anuncia que depósitos de R$ 10.000,00 mensais fornecerão após 10 meses uma quantia de R$ 124.610,97. Qual é a taxa de retorno mensal oferecida? **Resposta: 4,8% a.m.**

16- Um equipamento é vendido a vista por R$ 14.281,00, ou, então, por R$ 3.600,00 de entrada, uma parcela de R$ 9.000,00 após 6 meses e uma parcela de R$ 12.000,00 após 12 meses. Qual a taxa de juros do financiamento? **Resposta: 7,715% a.m.**

17-Um investidor dispõe de um capital de R$ 24.000,00, podendo aplicá-lo num empreendimento que lhe proporcionará um retorno mensal de R$ 5.744,10 nos cinco primeiros meses após a aplicação. Existe outra alternativa que é aplicar os R$ 24.000,00 e receber R$ 32.269,20 ao final do quinto mês após a aplicação. Com o auxílio da taxa interna de retorno, verifique qual a melhor alternativa para o investidor. **Resposta: A primeira, pois apresenta maior taxa interna de retorno.**

6- Análise de Alternativas de Investimentos pelo Método do Valor Presente Líquido (VPL)

5.1-Introdução

Os critérios de avaliação de investimentos levam em consideração apenas fatores econômicos, objetivando escolher alternativas de maior rentabilidade, ou menor custo, embora a meta do investidor possa não ser somente esta.

O fato de que nem sempre as propostas de investimento mais rentáveis possam ser realizadas, geralmente por causa de limitação dos recursos, faz com que o resultado de estudos puramente econômicos não seja o único fator a ser considerado na decisão final.

A análise de disponibilidade de recursos, dos encargos financeiros assumidos, etc., deve ser feita paralelamente; é o que se denomina análise financeira dos investimentos em perspectiva.

Há outros fatores a serem analisados e que não podem ser reduzidos a valores monetários, não sendo, portanto, considerados num estudo puramente econômico. São os chamados fatores imponderáveis. Esses fatores deverão ser considerados também na tomada de decisão, sendo sua avaliação subjetiva e puramente dependente do julgamento pessoal daqueles que têm a responsabilidade da escolha.

5.2- Considerações Sobre a Taxa Mínima de Atratividade

Devido à escassez do capital, o sistema de oferta e procura da economia fornece um preço para o seu uso; assim, o capital tem, de um modo geral, uma remuneração ou rentabilidade de garantia. Isto faz com que mesmo sendo usado pelo próprio dono ele apresente um custo, o custo da oportunidade perdida, ou seja: ao usá-lo, o seu possuidor deixa de auferir pelo menos a rentabilidade oferecida pelo mercado. Conclui-se que para um determinado investimento ser atrativo, deve render mais que as oportunidades de investimento perdidas devido ao investimento no projeto escolhido.

Taxa mínima de atratividade é a taxa mínima que uma proposta de investimento deverá produzir para ser atrativa.

A taxa mínima de atratividade é um parâmetro subjetivo e espelha a política de investimento da Instituição. Este parâmetro é uma função do risco de investimento, da disponibilidade de capital, do custo de capital, etc.

5.3- Método do Valor Atual ou Valor Presente Liquido (VPL)

No método do valor presente líquido calcula-se o valor atual do fluxo de caixa, com o uso da taxa mínima de atratividade; se este valor for positivo, a proposta de investimento é atrativa.

No caso de duas ou mais alternativas de investimento com a mesma duração, escolhe-se a de maior valor atual.

Quando as propostas têm vidas diferentes, não basta comparar simplesmente os fluxos de caixa. Deve-se aventar alguma hipótese sobre o que seria feito entre os términos dos projetos de menor e maior duração. Uma hipótese utilizada é repetir os projetos até o mínimo múltiplo comum de suas vidas. Outra hipótese utilizada é calcular o valor residual do projeto de maior duração no último período de vida do projeto de menor duração.

De um modo geral a data escolhida para o cálculo do valor atual é a do início do horizonte em estudo. Entretanto, qualquer que seja a data usada, não haverá reversão da decisão.

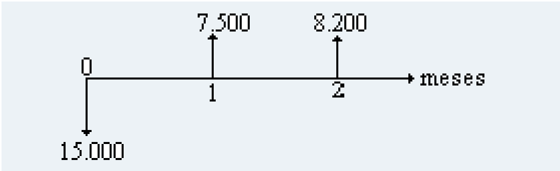
Em todo investimento o valor atual calculado com a taxa interna de retorno é nulo. Assim, um valor atual positivo indica que o projeto tem uma taxa interna de retorno superior à taxa mínima de atratividade.O inverso ocorre com valores atuais negativos.

O valor atual de um fluxo de caixa é igual ao máximo investimento que se estará disposto a fazer para se obter o fluxo de caixa em questão.

Em alguns projetos deseja-se comparar alternativas que fornecem o mesmo benefício. Neste caso, interessa a comparação dos custos das alternativas, sendo melhor a que apresentar menor custo. O valor atual dos custos das alternativas servirá, então, para compará-las.

Exemplos:

1º) Verificar se o investimento representado pelo fluxo de caixa seguinte deve ou não ser aceito, caso se considere uma taxa mínima de atratividade de 2,5% a.m.



Solução:

$$P = -\,15.000 + \frac{7.500}{(1+0{,}025)^1} + \frac{8.200}{(1+0{,}025)^2} = -\,15.000 + 7.317{,}07 + 7.804{,}88 = 121{,}95$$

$P(2{,}5\%) > 0$, logo o investimento é atrativo e deve ser aceito.

2º) Um investidor dispõe de um capital de R$ 150.000,00 podendo aplicá-lo num empreendimento que lhe proporcionará rendimentos de R$ 15.500,00 em cada um dos próximos 12 meses.

Outra alternativa para o investidor é aplicar os mesmos R$ 150.000,00 e receber 4 parcelas trimestrais iguais, no valor de R$ 48.000,00 cada uma.

Considerando uma taxa mínima de atratividade de 3% a.m., determine qual das duas alternativas é a melhor para o investidor.

Solução:

$$P_1 = -\,150.000{,}00 + 15.500{,}00 \times \frac{(1+0{,}03)^{12} - 1}{0{,}03(1+0{,}03)^{12}}$$

$$P_1 = -\,150.000{,}00 + 154.287{,}06 = 4.287{,}06$$

$$P_2 = -\,150.000{,}00 + \frac{48.000{,}00}{(1+0{,}03)^3} + \frac{48.000{,}00}{(1+0{,}03)^6} + \frac{48.000{,}00}{(1+0{,}03)^9} + \frac{48.000{,}00}{(1+0{,}03)^{12}}$$

$$P_2 = -\,150.000{,}00 + 43.926{,}80 + 40.199{,}24 + 36.788{,}00 + 33.666{,}23 = 4.580{,}27$$

Logo $P_2 > P_1$. Assim sendo, a 2ª alternativa é melhor.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01- Um carro é vendido à vista por R$ 32.000,00 ou a prazo, com entrada de R$ 9.600,00 mais 5 prestações mensais iguais e consecutivas de R$ 4.850,00 cada uma. Qual a melhor alternativa para o comprador, se a taxa mínima de atratividade é de 3% a.m., no regime de juros compostos? Resposta: É melhor comprar a prazo, pois o valor atual das seis parcelas é menor que o pagamento a vista.

02- Um investidor dispõe de um capital de R$ 120.000,00 e pode aplicá-lo num empreendimento que lhe proporcionará um rendimento de R$ 34.200,00 em cada um dos próximos quatro anos e R$ 42.000,00 em cada um dos dois anos seguintes. Uma outra alternativa para o investidor é aplicar os mesmos R$ 120.000,00 e receber R$ 314.212,00 após seis anos. Considerando uma taxa mínima de atratividade de 15% ao ano, qual a melhor alternativa para o investidor? Resposta: a primeira alternativa é melhor (apresenta maior valor presente líquido).

03- Uma empresa deve investir R$ 180.000,00 num projeto de ampliação da capacidade produtiva, para obter benefícios das entradas de caixa de R$ 40.000,00 por ano durante os próximos 6 anos. Se a taxa de atratividade da firma for 6% a.a., o projeto deve ou não ser aceito? Resposta: O projeto deve ser aceito

AMORTIZAÇÕES DE EMPRÉSTIMOS

1- DEFINIÇÕES IMPORTANTES

a) Mutuante ou credor: aquele que fornece o empréstimo.
b) Mutuário ou devedor: aquele que recebe o empréstimo.
c) Amortizar uma dívida: significa diminuir gradualmente, até a extinção total, o principal de uma dívida.
d) Parcelas de amortização: corresponde às parcelas de devolução do capital emprestado.
e) Prazo de amortização; é o intervalo de tempo, durante o qual são pagas as amortizações.
f) Prestação: é a soma da amortização com os juros e outros encargos, pagos em dado período.
g) Planilha: é um quadro, padronizado ou não, onde são colocados os valores referentes ao empréstimo, ou seja, o cronograma dos valores de recebimento e de pagamentos.
h) Saldo devedor: é o estado da dívida, ou seja, do débito, em um determinado instante de tempo.
i) Período de amortização: é o intervalo de tempo existente entre duas amortizações sucessivas.

2- PRINCIPAIS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

2.1-Pagamento no Final

Os juros são capitalizados no final de cada período financeiro e o empréstimo só é pago no final do prazo.

Exemplo: Um empréstimo de R$ 20.000,00 deverá ser amortizado em 24 meses com juros de 2% ao mês, no regime de juros compostos. Determinar o valor do resgate pelo Sistema de Pagamento no Final.

$S = P(1 + i)^n$
$S = 20.000(1 + 0,02)^{24} = 20\ 000 \times 1,608437 = 32\ 168,74$
S = R$ 32.168,74

2.2- Sistema Francês de Amortização (Price)

Detalhamento do Sistema

O empréstimo é pago em prestações periódicas iguais e postecipadas. Cada prestação é constituída pela soma da amortização do principal com os juros do período. A amortização é obtida por diferença entre os valores da prestação e os juros do período. Os juros decrescem com o tempo. O principal no início de cada período vai se tornando cada vez menor e as amortizações vão crescendo de modo que a soma dessas parcelas permaneça constante ao longo do tempo.

Exemplo: Um financiamento de R$ 20.000,00 deverá ser amortizado, através do Sistema Francês de Amortização, em 8 prestações mensais, com juros compostos de 2% ao mês.

- Calcule o valor da prestação;
- Calcule o saldo devedor após o pagamento da terceira prestação;
- Calcule as parcelas de juro e de amortização da quinta prestação;
- Calcule o total de juros e de amortização acumulados até a quarta prestação;
- Calcule o total de juros e de amortização acumulados da quarta à sétima prestações;
- Faça uma planilha com o desenvolvimento mensal das prestações, os juros pagos, a evolução das quotas de amortização e o saldo devedor.

Solução:

P = R$ 20.000,00
n = 8 prestações
i = 2% a.m.

- **Cálculo da prestação**

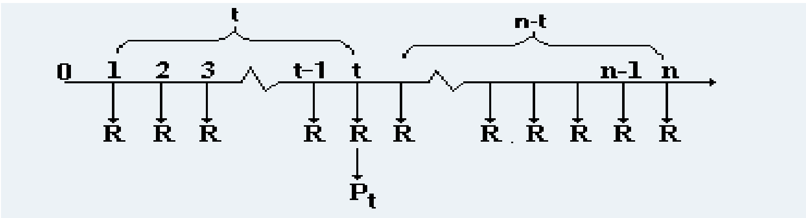
$$R = 20.000 \times \frac{0,02(1+0,02)^8}{(1+0,02)^8 - 1}$$

R= 20.000 $\times$ 0,136510

R =R$ 2.730,20

➢ **Cálculo do saldo devedor após o pagamento da terceira prestação.**

Ao efetuar o pagamento da prestação de ordem **t** ficará restando (**n-t**) prestações a serem pagas, conforme mostra o diagrama abaixo. Assim, o saldo devedor "P_t", naquele instante, será representado pelo valor atual das prestações restantes.



$\Rightarrow$ $$P_t = R \times \frac{(1+i)^{n-t} - 1}{i(1+i)^{n-t}}$$

Assim, o saldo devedor após o pagamento da terceira prestação será:

$$P_3 = 2.730,20 \times \frac{(1+0,02)^5 - 1}{0,02(1+0,02)^5}$$

$$P_3 = 2.730,20 \times 4,713460 = 12.868,69$$

➢ **Cálculo das parcelas de juro e de amortização da quinta prestação**

Para se obter as parcelas de juros e de amortização da prestação de ordem **t**, calcula-se inicialmente o saldo devedor após o pagamento da prestação de ordem (**t – 1**).

Assim, para calcular as parcelas de juros e de amortização da quinta prestação deve-se, inicialmente, calcular o saldo devedor após o pagamento da quarta prestação, isto é:

$$P_4 = 2.730,20 \times \frac{(1+0,02)^{8-4} - 1}{0,02(1+0,02)^{8-4}}$$

$$P_4 = 2.730,20 \times \frac{(1+0,02)^4 - 1}{0,02(1+0,02)^4} = 2.730,20 \times 3,807729 = 10.395,86$$

$j_5 = 0,02 \times 10.395,86 = 207,92$ e $A_5 = 2.730,20 - 207,92 = 2.522,28$

➢ **Planilha do financiamento**

n	PRESTAÇÕES R	JUROS $j_t = i \times SD_{t-1}$	AMORTIZAÇÕES $A_t = R - j_t$	SALDO DEVEDOR $SD_t = SD_{t-1} - A_t$
0	-	-	-	20.000,00
1	2.730,20	400,00	2.330,20	17.669,80
2	2.730,20	353,40	2.376,80	15.293,00
3	2.730,20	305,86	2.424,34	12.868,66
4	2.730,20	257,37	2.472,83	10.395,83
5	2.730,20	207,92	2.522,28	7.873,55
6	2.730,20	157,47	2.572,73	5.300,82
7	2.730,20	106,02	2.624,18	2.676,64
8	2.730,20	53,53	2.676,67	- 0,03 -

2.3-Sistema de Amortização Constante (SAC)

Detalhamento do Sistema

No sistema SAC o financiamento é pago em prestações linearmente decrescentes, sendo cada uma delas igual à soma da amortização do principal com os juros do período. Os juros são calculados sobre o saldo devedor do início de cada período. A amortização é o quociente entre a dívida inicial e o número de prestações. No sistema SAC os juros são uniformemente decrescentes ao longo do tempo, devido às amortizações acumuladas do principal. Como todas as amortizações são iguais, as prestações periódicas são, também, uniformemente decrescentes.

Exemplo: O financiamento de R$ 20.000,00 deverá ser amortizado, através do Sistema de Amortização Constante "SAC", em 8 prestações mensais, com juros compostos de 2% ao mês. Faça uma planilha com o desenvolvimento mensal das prestações, os juros pagos, a evolução das quotas de amortização e o saldo devedor.

Solução:

$$\text{Parcela de Amortização} = \frac{20.000,00}{8} = 2.500,$$

Planilha do financiamento

n	PRESTAÇÕES $R_t = j_t + A$	JUROS $j_t = SD_{t-1} \times i$	AMORTIZAÇÕES A	SALDO DEVEDOR $SD_t = SD_{t-1} - A$
0	-	-	-	20.000,00
1	2.900,00	400,00	2.500,00	17.500,00
2	2.850,00	350,00	2.500,00	15.000,00
3	2.800,00	300,00	2.500,00	12.500,00
4	2.750,00	250,00	2.500,00	10.000,00
5	2.700,00	200,00	2.500,00	7.500,00
6	2.650,00	150,00	2.500,00	5.000,00
7	2.600,00	100,00	2.500,00	2.500,00
8	2.550,00	50,00	2.500,00	- 0-

➢ **Cálculo do Saldo Devedor após o pagamento da prestação de ordem t**

$$\boxed{P_t = P - t \times \text{(a parcela de amortização)}}$$

Exemplo: No problema anterior, o saldo devedor após o pagamento da 4ª prestação é dado por:

$P_4 = 20.000 - 4 \times 2.500 = 20.000 - 10.000 = 10.000$

2.5- Sistema Americano de Amortização

Detalhamento do Sistema

No sistema americano, o devedor obriga-se a pagar periodicamente apenas os juros do capital emprestado e a restituí-lo, integralmente, no final do prazo estabelecido.

Com a finalidade de evitar o desembolso violento no final do prazo combinado, o devedor procura formar, por sua conta e, mediante depósitos periódicos de parcelas constantes, um fundo de amortização (sinking fund) com o qual, no fim do prazo, possa pagar a dívida sem maiores problemas.

Exemplo: Uma pessoa toma emprestada a quantia de R$ 15.000,00 com a condição de pagar mensalmente os juros à taxa de juros compostos de 2,5% a.m., e a restituí-la integralmente no final de 10 meses. O devedor pretende constituir um fundo de amortização com quotas mensais, calculadas à taxa de juros compostos de 2% a.m. Calcular o seu dispêndio mensal e formar a planilha de reembolso.

Solução:

P = R$ 15.000,00
n = 10 meses
i = 2,5% a.m.

Cálculo dos juros mensais

$j = 15.000,00 \times 0,025 = 375,00$

Cálculo da Quota Mensal do Fundo de Amortização

$R = 15.000 \times FSR\,(2\%, 10) = 15.000 \times 0,091327 = 1.369,90$

Cálculo do dispêndio mensal

Juros + quota de amortização = 375,00 + 1.369,90 = 1.744,90

Planilha do financiamento

n	QUOTA MENSAL DO FUNDO DE AMORTIZAÇÃO	JUROS	DISPÊNDIO MENSAL	FUNDO DE AMORTIZAÇÃO	CAPITAL NÃO RECONSTITUÍDO
0	-	-	-	-	15.000,00
1	1.369,90	375,00	1.744,90	1.369,90	13.630,10
2	1.369,90	375,00	1.744,90	2.767,20	12.232,80
3	1.369,90	375,00	1.744,90	4.192,44	10.807,56
4	1.369,90	375,00	1.744,90	5.646,19	9.353,81
5	1.369,90	375,00	1.744,90	7.129,01	7.870,99
6	1.369,90	375,00	1.744,90	8.641,49	6.358,51
7	1.369,90	375,00	1.744,90	10.184,22	4.815,78
8	1.369,90	375,00	1.744,90	11.757,80	3.242,20
9	1.369,90	375,00	1.744,90	13.362,86	1.637,14
10	1.369,90	375,00	1.744,90	15.000,00	-0-

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

01- Um financiamento de R$120.000,00 deve ser amortizado pelo Sistema Francês em 6 prestações trimestrais, com taxa de juros compostos de 10% ao trimestre.

a) Determinar o valor da prestação trimestral; **Resposta: R$ 27.552,89**
b) Construir a planilha do financiamento;
c) Determinar as parcelas de juros e amortização da quarta prestação; **Respostas:R$ 6.851,99 e R$ 20.700,90.**
d) Determinar o saldo devedor após o pagamento da terceira prestação. **Resposta: R$ 68.519,93.**

02- Um banco financia um equipamento no valor de R$ 220.000,00, em 24 prestações mensais, sem carência, à taxa de 2,5% ao mês, no regime de juros compostos. Utilizando o Sistema Francês de Amortização, determinar:

a) o valor da prestação; **Resposta: R$ 12.300,82**.
b) as parcelas de juros e amortização referentes à 15ª prestação; **Respostas:R$ 2.691,44 e R$ 9.609,38.**
c) o saldo devedor após o pagamento da 10ª prestação. **Resposta: R$ 143.807,82.**

03- A Quantia de R$ 25.000,00 foi financiada em 30 prestações mensais através do Sistema Francês de Amortização, com taxa de juros compostos de 2% a.m. Nestas condições, pede-se:

a)o valor da prestação mensal; **Resposta: R$ 1.116,25.**
b) o saldo devedor após o pagamento da 18ª prestação; **Resposta: R$ 11.804,64.**
c) a quota de amortização e os juros pagos com a 20ª prestação. **Respostas: R$ 897,76 e R$ 218,49.**

04- Um empréstimo de R$ 12.000,00 será amortizado através do sistema francês de amortização em 6 prestações mensais, com juros compostos de 3% ao mês.

a) calcule o valor da prestação mensal; **Resposta: R$ 2.215,17.**
b) organize uma planilha com o desenvolvimento mensal das prestações, dos juros pagos, das quotas de amortização e do saldo devedor.

05- Organize a planilha do problema anterior utilizando o sistema “SAC”.

06- Uma pessoa toma por empréstimo a quantia de R$ 16.000,00 com a condição de pagar mensalmente os juros compostos, à razão de 3% ao mês, e de restituí-la integralmente no fim de 8 meses. O devedor pretende constituir um fundo de amortização com quotas mensais calculadas à taxa de 2,5% ao mês de juros compostos.

a) calcule o seu dispêndio mensal; **Resposta: R$ 2.311,48.**
b) organize o plano teórico de reembolso.

B I B L I O G R A F I A

ARAÚJO, Carlos Roberto Vieira. Matemática Financeira. São Paulo: Atlas,1992.

CAMPOS FILHO, Ademar. Matemática Financeira. São Paulo: Atlas, 2000.

FARO, Clovis de. Princípios e Aplicações do Cálculo Financeiro. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC.

FRANCISCO, Valter De. Matemática Financeira. São Paulo: Atlas, 1986.

HAZZAN, Samuel / Pompeu, José Nicolau. Matemática Financeira. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

HIRSCHFELD, Henrique. Engenharia Econômica e Análise de Custos. São Paulo: Atlas.

JUER, Milton. Matemática Financeira Aplicações. no Mercado de Títulos. Rio de Janeiro:IBEMEC, 1984.

KUHNEN, Osmar Leonardo / Bauer, Udibert Reinold.Matemática Financeira Aplicada e Análise de Investimentos. 3.ed. São Paulo: Atlas, 2001.

MATIAS, Washington Franco / Gomes, José Maria. Matemática Financeira. São Paulo: Atlas, 1982.

PLATO, Ricardo Antônio de. Matemática Financeira Aplicada às Operações no Sistema Financeiro Brasileiro. São Paulo: Livraria Nobel S/A Editora.

PUCCINI, Abelardo de Lima. Matemática Financeira Objetiva e Aplicada. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

SAMANEZ, Carlos Patrício. Matemática Financeira, Aplicações à Análise de Investimento. 3.ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. Matemática Financeira. 2.ed. São Paulo: Atlas. 1982.

ZENTGRAF, WALTER. Calculadora financeira HP-12C. 1.ed. 1993; 4a tiragem. São Paulo: Atlas.

POLO, EDISON FERNANDES. Engenharia das operações financeiras pela HP-12C: Editora Atlas S/A-1996.

TOSI, ARMANDO JOSÉ. Matemática financeira com utilização do Excel 2000 – São Paulo: Atlas, 2000.